COLLÈGE MODERNE EUREKA SIKENSI — Année Scolaire : 2019 – 2020

Terminale D — Prof : M. BANIABA & LIDA

DEVOIR DE MATHEMATIQUES

Durée :4H00

Exercice 1 4points

Dans chacun des cas suivants, calculer la limite de la fonction f en x_0

$$f(x) = \frac{\sqrt{x^2+5}-3}{x^2-4} \; avec \; x_0 = -2$$

$$f(x) = \sqrt{\frac{1+x}{3-x}} \; avec \; x_0 = 3 \; par \; valeurs \; inférieurs$$

$$f(x) = 2x - 1 + \sqrt{4x^2+1} \; avec \; x_0 = -\infty$$

$$f(x) = \frac{\sin 5x}{2x} \quad avec \; x_0 = 0$$

Exercice 2 4points

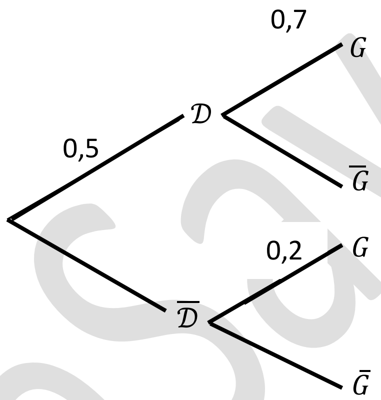
Une salle de jeux comporte deux consoles identiques proposant le même jeu.

Un jour, l'une des deux est déréglée.

Les joueurs ne peuvent pas savoir laquelle des deux est déréglée.

1- Ce jour-là, un joueur choisit au hasard l'une des deux consoles et il joue une partie sur cette console. On note :
   - $\mathcal{D}$ l'évènement « le joueur choisit la console déréglée et $\overline{\mathcal{D}}$ l'évènement contraire ;
   - G l'évènement « le joueur gagne la partie » et $\bar{G}$ l'évènement contraire.

Cette situation aléatoire est modélisée par l'arbre incomplet suivant, dans lequel figurent certaines probabilités :



Ainsi 0,7 est la probabilité que le joueur gagne sachant qu'il a choisi la console déréglée.

a- Reproduire cet arbre sur la copie et le compléter.
b- Calculer la probabilité de l'évènement « le joueur choisit la console déréglée et il gagne ».
c- Calculer la probabilité de l'évènement « le joueur choisit la console non déréglée et il gagne ».
d- Démontrer que la probabilité que le joueur gagne est égale à 0,45.
e- Calculer la probabilité que le joueur ait choisi la console déréglée sachant qu'il a gagné.

2- Trois fois successivement et de façon indépendante, un joueur choisit au hasard l'une des deux consoles et joue une partie.
Calculer la probabilité de l'évènement « le joueur gagne exactement deux fois ». (Le résultat sera donné sous forme décimale arrondie au millième).

<u>Problème</u> 12points

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{x^3-4}{x^2+1}$ de représentation graphique $(\mathcal{C}f)$ dans un repère orthonormé (O, I, J) (unité : 1 cm) et la fonction h définie sur $[-1; +\infty[$ par :$h(x) = \frac{x^2\sqrt{x+1}}{|x|}$ si $x \neq 0$ et $h(0) = 0$ de representation graphique $(\mathcal{C}h)$ dans le repère orthonormé (O', I', J') (unité : 3cm)

Partie A : Étude de la fonction auxiliaire

On considère la fonction u définie sur $\mathbb{R}$ par $u(x) = x^3 + 3x + 8$

1. a) Calculer les limites de u en $+\infty$ et en $-\infty$
   b) Calculer $u'(x)$. Etudier le signe de $u'(x)$ et dresser le tableau de variation de u
2. a) Justifier que l'équation $u(x) = 0$ admet une solution unique α dans $\mathbb{R}$ et que $-1{,}6 < \alpha < -1{,}5$
   b) Justifier que pour tout $x \in]-\infty; \alpha[\quad u(x) < 0$ *et pour tout* $x \in]\alpha; +\infty[; u(x) > 0$

Partie B : Étude de la fonction f

1. calculer les limites de f en $-\infty$ *et* $+\infty$
2. a) Calculer $f'(x)$ pour tout nombre réel x, et justifier que $f'(x) = \frac{xu(x)}{(x^2+1)^2}$.
   b) Etudier le signe de $f'x)$ et dresser son tableau de variation
3. Démontrer que $f(\alpha) = \frac{3}{2}\alpha$
4. a)Démontrer que la droite (D) d'équation $y = x$ est une asymptote oblique à $(\mathcal{C}f)$.
   b) Etudier les positions relatives de $(\mathcal{C}f)$ et de (D)
5. Construire la droite (D) et la courbe $(\mathcal{C}f)$ dans le même repère(O, I, J)

Partie C : Étude de la fonction h

1. a) Démontrer que pour tout nombre réel x de $[-1; 0[, h(x) = -x\sqrt{x+1}$ et pour tout nombre réel x de $]0; +\infty[, h(x) = x\sqrt{x+1}$.
   b) Etudier la continuité de h en 0
   c) Etudier la dérivabilité de h à gauche et à droite de 0. h est elle dérivable en 0 ?
   d) Etudier la dérivabilité de h à droite de -1 et interpréter graphiquement le résultat
2. a) Calculer $h'(x)$ et étudier son signe sur $[-1; 0[\cup]0 + \infty[$
   b) Dresser le tableau de variation de h, on calculera la limite en +∞
3. Calculer la limite de $\frac{h(x)}{x}$ en $+\infty$ et interpréter graphiquement le résultat
4. a) Soit g la restriction de h à $[0; +\infty[$, démontrer que g réalise une bijection de $[0; +\infty[$, sur un intervalle J à préciser. On note g^{-1} sa bijection réciproque