DRENET. Direction Régionale de l'Éducation Nationale et de l'Enseignement Technique. Ferkessédougou. DRENET.

BACCALAURÉAT BLANC **Coefficient : 5**
SESSION : Février 2018 **Durée : 4h**

MATHEMATIQUES

SÉRIE : C

Cette épreuve comporte deux (02) pages numérotées page1 et page2
Toute calculatrice scientifique est autorisée

EXERCICE 1

I-1.a)On donne le nombre complexe : $a = 2 - 2i\sqrt{3}$.
Déterminer sous forme algébrique les racines carrées de $2 - 2i\sqrt{3}$.
b) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation :$2z^2 - (3\sqrt{3} + 5i)z + 4i\sqrt{3} = 0$.

2. On considère le polynôme complexe : $p(z) = 2z^3 - 3(\sqrt{3} + 3i)z^2 - 10(1 - i\sqrt{3}) + 8\sqrt{3}$
a) Vérifier que :$p(2i) = 0$.
b) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $p(z) = 0$.

II. Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(\mathbf{O}, \overrightarrow{\mathbf{e_1}}, \overrightarrow{\mathbf{e_2}})$, unité graphique 2cm.
On donne les points U, B et K d'affixes respectives $z_U = \sqrt{3} + i$, $z_B = 2i$ et $z_K = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2}i$

1.a) Placer les points U, B, et K dans le plan complexe.
b) Ecrire sous forme trigonométrique les nombres complexes z_U , z_B et z_K.

2.Déterminer la nature du triangle BOU.

3.Soit C l'image du point O par la symétrie de centre K.
a) Déterminer l'affixe du point C.
b) Démontrer que le quadrilatère BOUC est un losange.

4.On note G = bar {(O, 2), (U, −1),(C, 1)}.
a) Démontrer que G est milieu du segment [BO].
b) Déterminer et construire l'ensemble (Γ) des points M du plan tels que :

$$\left\|2\overrightarrow{MO} - \overrightarrow{MU} + \overrightarrow{MC}\right\| = \left\|\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MU} - 2\overrightarrow{MC}\right\|$$

EXERCICE 2

1.On considère l'équation (E) : $8x + 5y = 1$,où x et y sont des entiers relatifs.
a) Justifier qu'il existe un couple d'entiers relatifs $(u; v)$ tel que : $8x + 5y = 1$.
b) Soit $(\boldsymbol{x}; \boldsymbol{y})$un couple d'entiers relatifs solution de (E). Démontrer que : $3x \equiv 1[5]$.
c) Résoudre dans $\mathbb{Z}$, $3x \equiv 1[5]$
d) En déduire que l'ensemble des solutions de (E) est : $\{(5k + 2; -8k - 3), k \in \mathbb{Z}\}$

2. Résoudre l'équation (E') : $(x; y) \in \mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$, $8x + 5y = 400$

3.Dans une ferme, un fermier propose deux types de volaille à sa clientèle : des pintades et des poulets au prix de 8000 francs pour une pintade et de 5000 francs pour un poulet.
Un client passe une commande de 400 000 francs au fermier. Il souhaite que sa commande comporte plus de pintades que de poulets. Mais le nombre de pintades doit être inferieur à 36.
Déterminer le nombre possible de poulets et de pintades de cette commande.

PROBLEME

Pour tout entier naturel $\boldsymbol{n}$ non nul, on considère la fonction f_n définie sur [0 ;+∞[par

$$\begin{cases} \text{si } x > 0, & f_n(x) = x e^{-\frac{1}{nx}} \\ & f_n(0) = 0 \end{cases}$$

On désigne par (C_n) la courbe représentative de la fonction f_n dans le plans muni d'un repère orthonormé $(\mathbf{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\,)$.Unité graphique : 4 cm.

Partie A : *Etude de la fonction f_1*

1. Montrer que f_1 est continue et dérivable en 0.

2.a)Calculer la limite de f_1 en +∞.

b) Etudier le sens de variation de f_1 sur [0 ;+∞[.

3. Démontrer que la droite (D_1) d'équation $y = x - 1$ est asymptote à la courbe (C_1) de f_1.

Partie B : *Etude des variations de f_n pour $\boldsymbol{n} \in \mathbb{N}^*$*

1.a) Justifier que f_n est continue en 0.

b) Etudier la dérivabilité de f_n en 0.

2. Déterminer la limite de f_n en $+\infty$.

3.a) Pour $\in\,]0; +\infty[$, déterminer la dérivée $f'_{\boldsymbol{n}}$de f_n.

b) Justifier que la fonction f_n est strictement croissante sur $[0; +\infty[$, puis dresser son tableau de variation.

4. Soit g la fonction définie sur $[0; +\infty[$ par $g(t) = e^{-t} - 1 + t - \frac{t^2}{2}$.

a) Etudier les variations de la dérivée g' de g.

b) Déterminer le signe g' et celui de g sur $[0; +\infty[$.

c) En déduire que pour tout nombre réel $t \geq 0$, on a : $0 \leq e^{-t} - (1 - t) \leq \frac{t^2}{2}$.

5.a) Démontrer à l'aide de la question **B-4-c** que pour tout nombre réel $\boldsymbol{x} > 0$:

On a : $0 \leq f_n(x) - \left(x - \frac{1}{n}\right) \leq \frac{1}{2n^2 x}$.

b) En déduire que la droite (D_n) d'équation $y = x - \frac{1}{n}$ est asymptote à (C_n)**.** Préciser la position relative de (C_n) et (D_n).

6.a) Représenter la courbe (C_1) de la fonction f_1 et son asymptote (D_1), puis préciser sa tangente en 0.

b) Etudier la position relative des courbes (C_n) et (C_{n+1}) .

c) Démontrer que la courbe (C_n) est l'image de la courbe (C_1) par l'homothétie de centre O et de rapport $\frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{n}}$.

d) Construire la courbe (C_2) sur le même graphique que (C_1).

Partie C

1. Démontrer que l'équation $f_n(x) = 1$ admet une unique solution α_n dans]0 ;+∞[.

2. Démontrer que α_n est solution de l'équation : $x \ln x = \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{n}}$.

3. Soit h la fonction définie sur [1 ; +∞[par $h(x) = x \ln x$.

a) Etudier son sens de variation.

b) Justifier que $1{,}76 \leq \alpha_1 \leq 1{,}77$.

4. Démontrer par récurrence pour tout entier naturel non n , la suite des nombres (α_n) est décroissante.