Corrigé barème bac blanc Février 2018
Mathématiques : série **C** – coeff :5
LYCEE MODERNE FERKE et CC LWANGA FERKE

EXERCICE 1	**5** points	
I.1	a) Les racines carrées de a sont : $\sqrt{3}-i$ et $-\sqrt{3}+i$	0,25×2
	b)Résolution dans $\mathbb{C}$ de l'équation : $2z^2-(3\sqrt{3}+5i)z+4i\sqrt{3}=0$ On a :$\Delta= 2-2i\sqrt{3}$,soit $\delta^2=\Delta=a=\left(\sqrt{3}-i\right)^2=\left(-\sqrt{3}+i\right)^2$; on obtient : $z_1=\sqrt{3}+i$ et $z_2=\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{3}{2}i$. $S=\left\{\sqrt{3}+i\,,\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{3}{2}i\right\}$	0,25×2
2	a)Vérification :$p(2i)=0$	0,25
	b)Résoudre l'équation $p(z)=0$ On obtient : $p(z)=(z-2i)\left(2z^2-(3\sqrt{3}+5i)z+4i\sqrt{3}\right)=0$ Soit $z_0=2i$; $z_1=\sqrt{3}+i$ et $z_2=\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{3}{2}i$. $S=\left\{2i\,,\sqrt{3}+i\,,\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{3}{2}i\right\}$	0,25 0,25×2
II.1	a)Voir figure BOUC et (C)	0,25×2
	b)Forme trigonométrique : $\begin{cases} z_U=\sqrt{3}+i=2\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)\\ z_B=2i=2\left(\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}\right)\\ z_K=\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{3}{2}i=\sqrt{3}\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)\end{cases}$	0,25×3
2	Nature du triangle BOU. On a : $\begin{cases}\lvert z_U\rvert=\lvert z_B\rvert=2=OB=OU\\ mes\left(\overrightarrow{OU},\overrightarrow{OB}\right)\equiv arg\left(\frac{z_B}{z_U}\right)[2\pi]\equiv arg(z_B)-arg(z_U)[2\pi]\equiv\frac{\pi}{3}[2\pi]\end{cases}$ BOU est un triangle équilatéral	0,25
3	a)Affixe du point C : $z_C=\sqrt{3}+3i$	0,25
	b)Nature du quadrilatère BOUC : On a : $\frac{z_B+z_U}{2}=\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{3}{2}i=z_K\Rightarrow$ K est milieu de [BU] et de [OC]. Le triangle BOU est équilatéral .$\begin{cases}S_K(B)=U\\S_K(O)=C\\S_K(U)=B\end{cases}\Rightarrow$ BUC est équilatéral. On a : OB=OU=UC=BC . Le quadrilatère BOUC est un losange.	0,50
4	a)On note : G = bar {(O, 2), (U, −1),(C, 1)}. On obtient :$\overrightarrow{OG}=\frac{1}{2}\overrightarrow{UC}=\frac{1}{2}\overrightarrow{OB}$ G est milieu de [BO]	0,25
	b) Détermination de (Γ) : $\begin{cases}\lVert 2\overrightarrow{MO}-\overrightarrow{MU}+\overrightarrow{MC}\rVert=\lVert\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MU}-2\overrightarrow{MC}\rVert\\ \lVert 2\overrightarrow{MG}\rVert=\lVert\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{CU}\rVert\\ \lVert\overrightarrow{MG}\rVert=\frac{1}{2}\lVert\overrightarrow{CO}\rVert=CK=KO=\sqrt{3}\end{cases}$ (Γ) est le cercle de centre G et rayon $CK=KO=\sqrt{3}$	0,25 0,25
EXERCICE 2	**4** points	
1	a)Justification : 8 et 5 sont premiers entre. D'après le théorème de BEZOUT, il existe un couple d'entiers relatifs (u , v) tel que 8u+5v=1	0,25
	b) Soit $(\boldsymbol{x};\boldsymbol{y})$un couple d'entiers relatifs solution de (E). On a : $\begin{cases}3x=1+5(-x-y)\\3x\equiv1[5]\end{cases}$	0,5
	c) Résoudre dans $\mathbb{Z}$, $3x\equiv1[5]$. si $x\equiv0[5]\Rightarrow3x\equiv0[5]$; si $x\equiv1[5]\Rightarrow3x\equiv3[5]$	1

1eSavoir.net

	si $x \equiv 2[5] \Rightarrow 3x \equiv 1[5]$; si $x \equiv 3[5] \Rightarrow 3x \equiv 4[5]$; si $x \equiv 4[5] \Rightarrow 3x \equiv 2[5]$ On a : $S = \{5k+2\}$avec k∈ℤ	
	d) Solution de (E) : $S = \{(5k+2; -8k-3), k \in \mathbb{Z}\}$	0,5
2	Résoudre l'équation (E') : $(\boldsymbol{x};\boldsymbol{y}) \in \mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$, $8x + 5y = 400$ Une solution particulière de (E') est le couple (800 ; -1200) On a : $S = \{(5k+800; -8k-1200), k \in \mathbb{Z}\}$	0,75
3	Soit x le nombre de pintades et y le nombre de poulets. On a : $8000x + 5000y = 400000 \Rightarrow 8x + 5y = 400$ Soit $x = 5k + 800$ *et* $y = -8k - 1200$ et k∈{-154 ;-153} ; 0<y<x<36 x =35 pintades et y=24 poulets.	1

Problème : $\begin{cases} \text{si } x > 0, & f_n(x) = xe^{-\frac{1}{nx}} \\ & f_n(0) = 0 \end{cases}$

Partie A : Etude de $\boldsymbol{f_1}$		2,5 points
1	Continuité de f_1 en 0. $\lim\limits_{x\to0} f_1(x) = \lim\limits_{x\to0} xe^{-\frac{1}{x}} = \lim\limits_{X\to+\infty}\frac{1}{Xe^X} = 0 = f_1(0) \Rightarrow f_1$ est continue en 0. Dérivabilité en 0 : $\lim\limits_{x\to0}\frac{f_1(x)-f_1(0)}{x} = \lim\limits_{x\to0} e^{-\frac{1}{x}} = \lim\limits_{X\to+\infty} e^{-X} = 0 = f_1'(0) \Rightarrow f_1$ est dérivable en 0	0,25×2 0,25×2
2	a) $\lim\limits_{x\to+\infty} f_1(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} xe^{-\frac{1}{x}} = +\infty$ car $\begin{cases} \lim\limits_{x\to+\infty} x = +\infty \\ \lim\limits_{x\to+\infty} e^{-\frac{1}{x}} = 1 \end{cases}$	0,25
	b) f_1 est dérivable sur]0 ;+∞[. $\forall x \in]0;+\infty[$, $f_1'(x) = \left(1+\frac{1}{x}\right)e^{-\frac{1}{x}} > 0$. f_1 est strictement croissante sur]0 ;+∞[et la courbe (C₁) de f_1 admet une tangente horizontale en 0.	0,25×3
3	$\lim\limits_{x\to+\infty}(f_1(x)-y) = \lim\limits_{x\to+\infty} x(e^{-\frac{1}{x}}-1)+1 = \lim\limits_{X\to0} -(\frac{e^X-1}{X})+1 = -1+1 = 0$. (D₁) d'équation : $\boldsymbol{y = x - 1}$ est asymptote oblique à (C₁) en +∞.	0,25×2

Partie B : *Etude des variations de* $\boldsymbol{f_n}$ *pour* $\boldsymbol{n} \in \mathbb{N}^*$		***6** points*
1	a)Continuité de $\boldsymbol{f_n}$ en 0. $\lim\limits_{x\to0} f_n(x) = \lim\limits_{x\to0} xe^{-\frac{1}{nx}} = \lim\limits_{X\to+\infty}\frac{1}{nXe^X} = 0 = f_n(0) \Rightarrow f_n$ est continue en 0.	0,25×2
	b)Dérivabilité de $\boldsymbol{f_n}$ en 0. $\lim\limits_{x\to0}\frac{f_n(x)-f_n(0)}{x} = \lim\limits_{x\to0} e^{-\frac{1}{nx}} = \lim\limits_{X\to+\infty} e^{-X} = 0 = f_n'(0) \Rightarrow f_n$ est dérivable en 0	0,25×2
2	$\lim\limits_{x\to+\infty} f_n(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} xe^{-\frac{1}{nx}} = +\infty$ car $\begin{cases} \lim\limits_{x\to+\infty} x = +\infty \\ \lim\limits_{x\to+\infty} e^{-\frac{1}{nx}} = 1 \end{cases}$	0,25

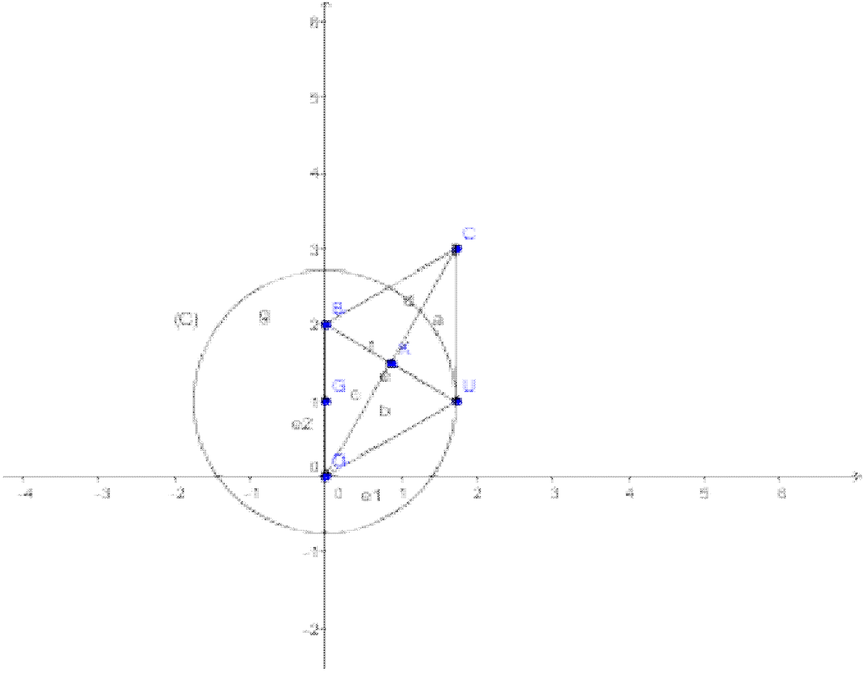
Partie **B** suite		
3	a) f_n est dérivable sur]0 ;+∞[. $\forall x \in]0;+\infty[$, $f_n'(x) = \left(1+\frac{1}{nx}\right)e^{-\frac{1}{nx}} > 0$.	0,25
	b) $\forall x \in]0;+\infty[$, $f_n'(x) > 0$; f_n est strictement croissante sur]0 ;+∞[et la courbe (Cₙ) de f_n admet une tangente horizontale en 0. Tableau de variation de f_n. $\begin{array}{c\|l} x & 0 \qquad\qquad +\infty \\ \hline f_n'(x) & 0 \qquad + \\ \hline f_n(x) & 0 \nearrow +\infty \end{array}$	0,25×3
4	a) Etude des variations de la dérivée $\boldsymbol{g'}$ de $\boldsymbol{g}$.	0,25×2

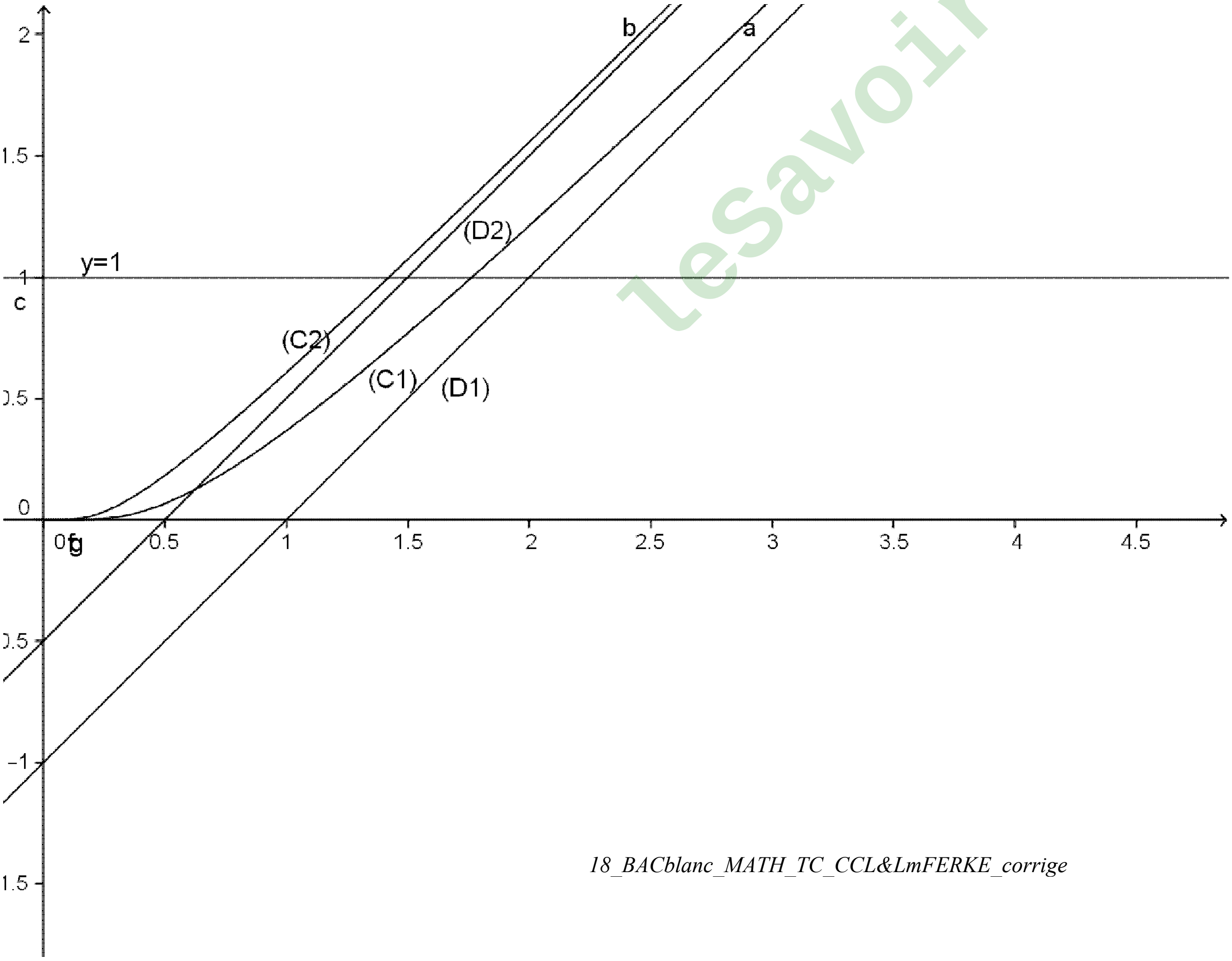
	a)g est dérivable sur ℝ+ ; $\forall x \in \mathbb{R}+, g'(t) = -e^{-t} + 1 - t$ et $g''(t) = e^{-t} - 1$ On a :$\forall t \geq 0, g''(t) \leq 0 \Rightarrow g'$ *est strictement décroissante sur* ℝ+ et $g'(0) = 0$	
	b)On a : :$\forall t \geq 0, g'(t) \leq 0 \Rightarrow g$ *est strictement décroissante sur* ℝ+ et $g(0) = 0$ alors On a : $\forall t \geq 0, g(t) \leq 0$	0,25×2
	c)Déduction : $\forall t \geq 0$, on a : $0 \leq e^{-t} - (1-t) \leq \frac{t^2}{2}$	0,25
5	a)Poser $t = \frac{1}{nx}$, on a :$\forall x > 0$; $\begin{cases} 0 \leq e^{-\frac{1}{nx}} - \left(1 - \frac{1}{nx}\right) \leq \frac{1}{2n^2x} \\ 0 \leq f_n(x) - \left(x - \frac{1}{n}\right) \leq \frac{1}{2n^2x} \end{cases}$	0,50
	b) On a : $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{2n^2x} = 0$; $\lim\limits_{x \to +\infty} f_n(x) - y = 0 \Rightarrow$(D$_n$) d'équation $\boldsymbol{y = x - \frac{1}{n}}$ est asymptote oblique à $(\boldsymbol{C_n})$ en +∞. (C$_n$) est au dessus de la droite (D$_n$).	0,25
6	a)(C$_1$) admet une tangente horizontale en 0. Courbe voir graphique	0,50
	b)position relative de (C$_n$) et (C$_{n+1}$). $\forall x > 0$; $f_{n+1}(x) - f_n(x) \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x\left(e^{-\frac{1}{(n+1)x}} - e^{-\frac{1}{nx}}\right) \geq 0 \\ -\frac{1}{n+1} \geq -\frac{1}{n} \\ \frac{1}{n+1} \leq \frac{1}{n} \Leftrightarrow n+1 \geq n \end{cases}$ (C_{n+1}) *est au dessus de* (C_n)	0,50
	c) Soit M(X ;Y) ∈ (C$_n$) et N(x ;y)∈(C$_1$). M=h(N) $\Leftrightarrow \overrightarrow{OM} = \frac{1}{n}\overrightarrow{ON} \Leftrightarrow \begin{cases} X = \frac{x}{n} \\ Y = \frac{y}{n} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = nX \\ y = nY \\ y = f_1(x) \end{cases}$ *et* $nY = nXe^{-\frac{1}{nX}} \Leftrightarrow Y = Xe^{-\frac{1}{nX}} = f_n(X)$. (C$_n$) est l'image de (C$_1$) par l'homothétie de centre O et de rayon $\boldsymbol{\frac{1}{n}}$	0,50
	d) Voir courbe (C$_2$)	0.25

Partie C		2,5 points
1.	Justification correcte	0,5
2	$\forall x > 0$; $\begin{cases} xe^{-\frac{1}{nx}} = 1 \\ \ln\left(xe^{-\frac{1}{nx}}\right) = 0 \\ \ln x + \ln e^{-\frac{1}{nx}} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \ln x - \frac{1}{nx} = 0 \\ \ln x = \frac{1}{nx} \\ x\ln x = \frac{1}{n} \end{cases}$. $\boldsymbol{\alpha_n}$ est solution de l'équation : $x\ln x = \boldsymbol{\frac{1}{n}}$.	0,5
3	a)Variation de h : h est continue et dérivable sur [1 :+∞[.$\forall x \geq 1$, $h'(x) = 1 + \ln x > 0$ h est strictement croissante sur [0 ;+∞[.	0,5
	b)Justification correcte : On h est strictement croissante sur [1 ;+∞[et h([1 ;+∞[= [0 ;+∞[comme 1∈[0 ;+∞[, de plus h(1,76)≤ h(α$_1$)≤h(1,77) alors 1,76≤α$_1$≤1,77.	0,5

Partie C suite		
4	Démonstration correcte : soit P$_n$ la proposition :∀nℕ*, la suite des nombres $(\boldsymbol{\alpha_n})$ est décroissante. La fonction h est strictement croissante sur [0 ;+∞[On a : $\begin{cases} h(\alpha_1) = 1 \\ h(\alpha_2) = \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \frac{1}{2} < 1 \Leftrightarrow \alpha_2 < \alpha_1$ Soit k∈ℕ*, supposons que :$\alpha_k > \alpha_{k+1}$ et démontrons que $\alpha_{k+1} > \alpha_{k+2}$ On a : $\begin{cases} h(\alpha_{k+1}) = \frac{1}{k+1} \\ h(\alpha_{k+2}) = \frac{1}{k+2} \end{cases} \Rightarrow \frac{1}{k+2} < \frac{1}{k+1} \Leftrightarrow \alpha_{k+2} < \alpha_{k+1}$ ∀n≥1 la suite des nombres $(\boldsymbol{\alpha_n})$ est décroissante.	0,5

Figure de l’exercice1





18_BACblanc_MATH_TC_CCL&LmFERKE_corrige

Représentation graphique de f1 et f2.