

BAC BLANC REGIONAL

EPREUVE DE MATHEMATIQUES

Serie C : Coefficient 5

DUREE : 4h

*Ce sujet comporte deux pages numérotées 1/2 et 2/2.
Toute calculatrice est autorisée.*

EXERCICE 1**Partie A**

Soit m un entier naturel impair. On suppose qu'il existe deux entiers naturels a et b tels que $m = a^2 - b^2$ avec $a > b$. (1)

1. a. Démontre que a et b sont de même parité si et seulement si $a^2 - b^2$ est pair.
b. Déduis-en que dans l'égalité (1), a et b ne sont pas de même parité.
2. Démontre qu'il existe deux entiers naturels p et q non nuls tels que :
 $p < q$ et $m = p \times q$. Détermine la parité de p et q .

Partie B

On admet que 250507 admet des diviseurs autres que 1 et lui-même. On se propose de chercher des couples d'entiers naturels $(a; b)$ vérifiant

$$(E) : a^2 - 250507 = b^2.$$

1. Soit x un entier naturel.
a. Donne dans un tableau les restes possibles dans la division par 9 de x et de x^2 .
b. Déduis-en les solutions dans $\mathbb{N}$ de l'équation $x^2 \equiv 1 [9]$.
2. On suppose que le couple $(a; b)$ vérifie (E)
a. Détermine alors les restes possibles par 9 de $a^2 - 250507$ puis de a^2 .
b. Déduis-en alors que les restes possibles de a par 9 sont 1 et 8.
c. Justifie que $a \geq 501$ et vérifie que pour tout entier b , $(501; b)$ n'est pas solution de (E).
3. On suppose que le couple $(a; b)$ vérifie (E)
a. Démontre qu'on a : $a \equiv 503 [9]$ ou $a \equiv 505 [9]$.
b. Détermine le plus petit entier naturel k tel que le couple $(505 + 9k; b)$ soit solution de (E) puis donne le couple solution correspondant.
c. Déduis des questions précédentes une écriture de 250507 en un produit de deux facteurs.

EXERCICE 2

Le plan est rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{u}, \vec{v})$. Unité graphique : 4cm.

Soit m un réel et (E_m) l'ensemble des points $M(x, y)$ du plan tels que :

$$(m-1)x^2 + 3my^2 + 2(m-1)x + m + 3 = 0$$

1. Détermine les ensembles (E_0) et (E_1) respectivement pour $m = 0$ et $m = 1$
2. Dans cette question, $m \neq 0$ et $m \neq 1$

Soit $O'(-1; 0)$ et $M(X, Y)$ dans le repère $(O', \vec{u}, \vec{v})$.

- a) Montrer que l'équation de (E_m) dans le repère (O', I, J) est :
 $(m-1)X^2 + 3mY^2 + 4 = 0$
 - b) Pour quelle valeur de m , (E_m) est-il un cercle ? Précise alors le centre et le rayon.
 - c) Détermine en fonction de m la nature de (E_m) .
3. Construis l'ensemble (E_m) pour $m = -3$

PROBLÈME**Partie A**

1. Soit g la fonction numérique dérivable définie sur $]0; +\infty[$ par :

$$g(x) = (2x-1)\ln x - x + 1.$$

- a) Démontre que la fonction dérivée g' de g est strictement croissante.

- b) Démontre que :
$$\begin{cases} \forall x \in]0; 1[, g'(x) < 0 \\ \forall x \in]1; +\infty[, g'(x) > 0 \end{cases}$$

- c) Démontre que : $\forall x \in]0; 1[\cup]1; +\infty[, g(x) > 0$

2. Soit u la fonction numérique dérivable définie sur $]0; 1[$ par :

$$u(x) = x - \frac{x^2}{2} - \ln(x+1)$$

- a) Démontre que la fonction u est strictement décroissante.

- b) Justifie que : $\forall x \in]0; 1[, u(x) < 0$

- b) Justifie que : $\forall x \in]0; 1[, x - \frac{x^2}{2} < \ln(x+1) \quad (1)$

$$[\text{On admet que : } \forall x \in]0; 1[, \ln(x+1) < x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} \quad (2)]$$

Partie B

Soit f la fonction définie sur $[0; +\infty[$ par :
$$\begin{cases} f(x) = \frac{x^2 - x}{\ln x}, & \text{si : } x \neq 0 \text{ et } x \neq 1 \\ f(0) = 0 \text{ et } f(1) = 1 \end{cases}$$

On note (C) sa courbe représentative dans le plan muni du repère orthogonal (O, I, J) .

1. Justifie que la droite (OI) est tangente à (C) au point O .

2. Soit h la fonction définie sur $] -1; +\infty[\setminus \{0\}$ par : $h(x) = \frac{x+1}{\ln(x+1)} - \frac{1}{x}$.

- a) A l'aide de (1) et (2), justifie que : $\forall x \in]0; 1[, \frac{-2x+9}{2x^2-3x+6} < h(x) < \frac{3}{x+2}$.

- b) Calcule : $\lim_{x \rightarrow 0} h(x)$. En déduis que : $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \frac{3}{2}$

$$[\text{On admet que : } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \frac{3}{2}]$$

- c) Justifie que f est dérivable en 1 et $f'(1) = \frac{3}{2}$. En déduis une équation de la droite (T) tangente à (C) au point d'abscisse 1.

Partie C

1. Justifie que : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ puis calcule $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$. Interprète graphiquement l'ensemble de ces résultats.

2. a) Démontre que : $\forall x \in]0; 1[\cup]1; +\infty[, f'(x) = \frac{g(x)}{(\ln x)^2}$.

- b) Etudie le sens de variation de f et dresse son tableau de variation.

3. Trace (T) et (C) dans le même repère (O, I, J) . ($OI = 2\text{cm}$ et $OJ = 1\text{cm}$).

Démontre que f réalise une bijection de $[0; +\infty[$ sur un intervalle à déterminer.