*Série : C*
*Coefficient : 5*

*Année scolaire : 2018 - 2019*
*Durée : 4 h*

BACCALAUREAT BLANC REGIONAL

*Indénié Duablin*

# MATHEMATIQUES

*Les calculatrices sont autorisées sauf celles pouvant faire des graphiques*

## EXERCICE 1 *(3 points)*

On se propose de déterminer l'ensemble $S$ des entiers relatifs $n$ vérifiant le système :

$$\begin{cases} n \equiv 9 \quad [17] \\ n \equiv 3 \quad [5] \end{cases}$$

1- Soit u et v deux entiers relatifs vérifiant la relation (E) : $17u+5v = 1$.

a) Soit $m = 3\times17u + 9\times5v$. Montrer que m appartient à S.

b) Montrer que le couple $(-2 ; 7)$ vérifie la relation (E).

c) En déduire un élément de S.

2- a) Vérifier que $n_0 = 43$ est un élément de S.

b) Justifier que pour tout entier n de S, on a : $n - n_0 \equiv 0$ [85].

c) En déduire que les éléments de S sont de la forme $43+85k$ où k est un entier relatif.

3- Application :

Zoé a entre 300 et 400 jetons. Si elle fait des tas de 17 jetons, il lui en reste 9.
Si elle fait des tas de 5 jetons, il lui en reste 3. Combien a-t-elle exactement de jetons ?

## EXERCICE 2 *(5 points)*

Dans le plan $\mathcal{P}$ muni du repère orthonormé $(O;\vec{\imath};\vec{\jmath})$ on définit les points :

$A(1;0)$ ; $B\left(\frac{3}{2};\frac{1}{2}\right)$ ; $C\left(\frac{3}{2};-\frac{1}{2}\right)$

1- a) Justifier le point $G(2;0)$ est le barycentre de {(A ; -1), (B ; 1), (C ; 1)}.

b) Vérifier que $-GA^2 + GB^2 + GC^2 = 0$

2- On note $(\Gamma)$ l'ensemble des points $M$ de $\mathcal{P}$, de coordonnées $(x;y)$, qui verifient la relation : $-MA^2 + MB^2 + MC^2 = 2(x-1)^2$

a) Montrer que $B$ et $C$ appartiennent à $(\Gamma)$

b) Montrer que $(\Gamma)$ est l'ensemble des points $M$ de $\mathcal{P}$ tels que : $MG^2 = 2(x-1)^2$

c) Montrer que $(\Gamma)$ a pour équation cartésienne : $x^2 - y^2 = 2$

d) En déduire la nature de $(\Gamma)$ et préciser ses éléments caractéristiques.

e) Construire $(\Gamma)$.

3- On se propose de déterminer l'ensemble $(\Sigma)$ des points M du plan d'affixe z vérifiant l'équation (E) : $z^2 + \bar{z}^2 = 4$

a) Montrer que B et C appartiennent à $(\Sigma)$.

b) Déterminer les points de $(\Sigma)$ d'affixes réelles. On notera $S_1$ et $S_2$ ces points.

c) Montrer que M(x ; y) appartient à $(\Sigma)$ si et seulement si $x^2 - y^2 - 2 = 0$.
En déduire la nature de $(\Sigma)$.

d) Que représentent les points $S_1$ et $S_2$ pour $(\Sigma)$.

**PROBLEME** *(12 points)*

Le plan est muni d'un repère orthogonal (O, I, J) avec $OI = 2cm$ et $OJ = 0,5cm$.

**Partie A** *(4 points)*

Soit $g$ la fonction numérique dérivable et définie sur $IR\backslash\{-1\}$ par :

$g(x) = 2x + 1 + \frac{1}{x+1} - \ln|x+1|$.

1) Calcule les limites de $g$ à droite en $-1$ et en $+\infty$.

2) a) Justifie que pour tout nombre réel $x$ différent de $-1$, on a : $g'(x) = \frac{x(2x+3)}{(x+1)^2}$.

   b) Détermine le signe de $g'(x)$ selon les valeurs de $x$.

   c) Dresse le tableau de variation de $g$ (on ne calculera pas les autres limites aux bornes de $D_g$).

   d) Déduis-en que $\forall x \in ]-\infty;-1[$, $g(x) < -3$ et $\forall x \in ]-1;+\infty[$, $g(x) \geq 2$.

3) Soit $k$ la restriction de $g$ à l'intervalle $[0;+\infty[$.

   a) Justifie que $k$ admet une bijection réciproque $k^{-1}$ dont on précisera l'ensemble de définition.

   b) Prouve que $k^{-1}$ est dérivable en 2019.

4) Soit $u$ la fonction définie sur $]-\infty;-1[$ par $u(x) = (x+1)\ln(-x-1)$.

   a) Calcule $u'(x)$ et montre que pour tout réel $x < -1$, on a : $g(x) + u'(x) = 2(x+1) + \frac{1}{x+1}$.

   b) Déduis-en la primitive $G$ sur $]-\infty;-1[$ de la fonction $g$ telle que $G(-2) = 1$.

**Partie B** *(4,5 points)*

Soit $f$ la fonction de IR vers IR définie par $f(x) = x\ln|x+1| - (x+1)^2 + 2x$, de courbe représentative $(C_f)$ et (D) la droite d'équation $x + 1 = 0$ dans le repère (O, I, J).

1) a) Précise l'ensemble de définition de $f$ et justifie que (D) est une asymptote à $(C_f)$.

   b) Calcule les limites en $-\infty$ de $f(x)$ et de $\frac{f(x)}{x}$, puis interprète graphiquement ces résultats.

2) a) Justifie que pour $x > -1$, on a : $f(x) = -x(x+1)\left[\frac{x+1}{x} - \frac{2}{x+1} - \frac{\ln(x+1)}{x+1}\right]$.

   b) Déduis-en le calcul des limites en $+\infty$ de $f(x)$ et de $\frac{f(x)}{x}$, puis interprète graphiquement ces résultats.

3) a) Démontre que pour tout nombre réel $x \neq -1$, on a : $f'(x) = -g(x) + 2$.

b) Vérifie que la tangente (T) à $(C_f)$ au point d'abscisse 0 est parallèle à l'axe des abscisses.

c)Prouve que $f$ est croissante sur $]-\infty; -1[$ et décroissante sur $]-1; +\infty[$.

d) Dresse le tableau de variation de $f$.

4) a) Vérifie que sur $]-1; +\infty[$, l'équation $f(x) = 0$ a une solution unique $\beta \in ]-0,9; -0,8[$

b) Prouve que $f'(\beta) = \frac{1}{\beta} - \frac{\beta^2}{\beta + 1}$ et que $f'(\beta) < 0$.

**Partie C** *(3,5 points)*

Soit $t$ la fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$ par $t(x) = x(-1 + \ln|x+1|)$ et $(\Gamma)$ la parabole d'équation $y = -x^2 + x - 1$.

1) Justifie que pour $x \neq -1$ : $\ln|x+1| - 1 \geq 0 \Leftrightarrow x \in ]-\infty; -1-e] \cup [e-1; +\infty[$.
2) Déduis-en le signe de $t(x)$ suivant les valeurs de $x$.
3) Étudie les positions relatives des courbes $(C_f)$ et $(\Gamma)$.
4) a) Étudie le sens de variation de la fonction $h$ de IR vers IR définie par $h(x) = -x^2 + x - 1$

   b) Dresse le tableau de variation de $h$.
5) Trace dans le repère (O, I, J) les droites (T), (D) et les courbes $(C_f)$ et $(\Gamma)$.