DRENET- FP Abidjan 1

République de Côte d'Ivoire
Union-Discipline -Travail

UP COCODY 3

Session de février 2019

ANNEE SCOLAIRE : 2018 – 2019

BAC BLANC REGIONAL

EPREUVE DE MATHEMATIQUES | **Serie D : Coefficient 4** | DUREE : 4h

Ce sujet comporte trois pages numérotées 1/3 ; 2/3 et 3/3.
Toute calculatrice est autorisée.

EXERCICE 1

Une usine est dotée d'un système d'alarme qui se déclenche en principe lorsqu'un incident se produit sur la chaine de production. Il peut arriver toute fois que le système soit mis en défaut.
En effet, des études statistiques ont montré que, sur une journée :

- La probabilité que l'alarme se déclenche par erreur, c'est-à-dire sans qu'il y ait un incident, est égale à $\frac{1}{50}$;
- La probabilité qu'un incident survienne sans que l'alarme se déclenche est égale à $\frac{1}{500}$;
- La probabilité qu'un incident se produise est égale à $\frac{1}{100}$.

On note :

A l'événement : « L'alarme se déclenche » ;
I l'événement : « Un incident se produit » ;
$\overline{A}$ et $\overline{I}$ leurs évènements contraires respectifs.

Ainsi, par exemple, $A \cap \overline{I}$ représente l'événement : « L'alarme se déclenche sans qu'il ait incident ».

Partie A

1. a) Calcule la probabilité que, dans une journée, un incident survienne et que l'alarme se déclenche.

   b) Déduis-en que la probabilité que l'alarme se déclenche est $\frac{7}{250}$.
2. Quelle est la probabilité que, sur une journée, le système d'alarme soit mis en défaut ?
3. L'alarme vient de se déclencher. Quelle est la probabilité qu'il y ait réellement un incident ?

Partie B

On admet que la situation est identique chaque jour dans l'usine et que l'alarme ne peut se déclencher au plus une fois par jour. ***On donnera l'arrondi d'ordre 4 des résultats.***

1. a) Calcule la probabilité que l'alarme soit déclenchée exactement deux fois dans une semaine.

   b) Calcule la probabilité que l'alarme soit déclenchée au moins une fois dans une semaine.
2. Soit n un entier naturel non nul.

   a) Justifie que la probabilité que l'alarme se déclenche au moins une fois pendant n jours successifs dans l'usine est : $P_n = 1 - \left(\frac{243}{250}\right)^n$.

   b) Détermine le nombre minimal de jours pour que : $P_n \geq 0{,}99$

EXERCICE 2

1. Résous dans $\mathbb{C}$ l'équation (E) : $z^2 - 6z + 12 = 0$.
2. On considère le nombre complexe u tel que $u = 3 + i\sqrt{3}$ et on note $\bar{u}$ son conjugué.
   a) Détermine le module et un argument de u.
   b) Déduis-en le module et un argument de $\bar{u}$.
3. Soit le nombre complexe Z tel que : $Z = \dfrac{(1+i)^3}{u^2}$
   a) Donne la forme trigonométrique du $(1+i)^3$ et celle de u^2.
   b) Déduis-en la forme trigonométrique de Z.
4. Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct (O, I, J).
   On donne les points A, B, M et N d'affixes respectives $z_A = 4$; $z_B = 2$; $z_M = u$ et $z_N = \bar{u}$.
   a) Place les points A, B, M et N.
   b) Démontre que les triangles OMA et ONA sont rectangles.
   c) Déduis-en que les points O, M, A et N sont cocycliques.

PROBLÈME

Partie A

On considère la fonction g définie sur $]0 ; +\infty[$ par : $g(x) = 3x - x\ln x + 1$

1-a) Calcule $\lim\limits_{x\to 0} g(x)$.

b) Calcule $\lim\limits_{x\to +\infty} g(x)$.

2) On admet que g est dérivable sur $]0 ; +\infty[$ et note g′ la fonction dérivée de g.

a) Calcule g′ pour tout x de $]0 ;+\infty[$ et étudie son signe.

b) Déduis-en le sens de variation de g puis dresse son tableau de variation.

3) Démontre que l'équation $g(x)=0$ admet une solution unique α dans l'intervalle $]0 ;+\infty[$ et que $21 < \alpha < 21{,}1$

4) Démontre que pour tout x de $]0;\alpha[$, $g(x) > 0$ et pour tout x de $]\alpha;+\infty[$, $g(x) < 0$.

Partie B

Soit la fonction numérique f dérivable et définie sur $]0 ;+\infty[$ par : $f(x) = \dfrac{2-\ln x}{1+x}$.

On note (C) sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J).
Unité graphique :1 cm.

1-a) Calcule $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$. Donne une interprétation graphique du résultat.

b) Démontre que la droite (OI) est asymptote à (C) en $+\infty$.

2-a) On admet que f est dérivable sur $]0 ; +\infty[$ et note f' la fonction dérivée de g.

Démontre que : $\forall x \in \left]0;+\infty\right[, f'(x) = \dfrac{-g(x)}{x(x+1)^2}$.

b) Étudie le sens de variation de f.

c) Démontre que $f(\alpha) = -\dfrac{1}{\alpha}$.

d) Dresse le tableau de variation de f.

3) Étudie la position de la courbe (C) par rapport à la droite (OI).

4) Détermine une équation de la tangente (T) à (C) au point d'abscisse 1.

5) Soit h la restriction de f à $]0;\alpha[$ et on note (C_h) sa courbe représentative.

a) Montre que h réalise une bijection de $]0;\alpha[$ sur un intervalle K que l'on précisera.

b) On note (C') la courbe représentative de la bijection réciproque de h.
Démontre que (C') et (C_h) ont la même tangente au point d'abscisse 1.

6) Construis (C_h) et (T) dans le même repère (0, I, J).

Partie C

On considère les fonctions v et V définies sur]0;+∞ [respectivement par :

$v(x) = x\ln x$ et $V(x) = \frac{1}{4}x^2(2\ln x - 1)$.

1) Démontre que V est une primitive de v sur]0 ; +∞[.

2) Détermine la primitive G de g sur]0 ; +∞[et qui prend la valeur 0 en 1.