BACCALAUREAT BLANC	EPREUVE DE MATHEMATIQUES		
SESSION AVRIL 2019	Serie : D	Durée : 4heures	Coefficient :4

Exercice 1

a est un nombre réel tel que $0 < a < 1$. Soit la suite (u_n) définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = \sqrt{1 + au_n} \end{cases}$$

1-a) Démontrer par récurrence que pour tout n élément de $\mathbb{N}$, $0 \leq u_n \leq \frac{1}{\sqrt{1-a}}$.

b) Etudier le sens de variation de la suite (u_n).

c) Justifier que la suite (u_n) est convergente.

2- Soit la suite (v_n) définie par $v_n = (u_{n+1})^2 - (u_n)^2$ pour tout entier naturel n.

a) Démontrer que la suite (v_n) est une suite géométrique dont déterminera la raison et le premier terme.

b) On pose $S_n = v_0 + v_1 + \cdots + v_{n-1}$pour $n \in \mathbb{N}^*$.

i)Justifier que $S_n = \frac{1-a^n}{1-a}$.

ii)Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*, u_n = \sqrt{S_n}$.

c) En déduire la limite de la suite (u_n).

Exercice2

1- Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation :

$$(E): (z^2 - 2z + 4 + 4i)(iz + 1 - 3i) = 0$$

2- Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct (O, I, J) (unité graphique :1cm). On donne les points A, B et C d'affixes respectives $a = 2i$, $b = 3 + i$et $c = 2 - 2i$.

a) Placer les points A, B et C dans le repère (O, I, J).

b) Démontrer que le triangle ABC est rectangle et isocèle.

c) Déterminer l'affixe du point D tel que ABCD soit un carré puis placer le point D dans le repère (O, I, J).

3- Soit S la similitude directe de centre A qui transforme C en B.

a) Déterminer l'écriture complexe de S.

b) Démontrer que l'image de D par S est I.

4- M et M' sont les points d'affixes respectives z et z' tels que $z' = \frac{iz-2i-2}{z-2i}$.

a) Déterminer l'ensemble des points M d'affixe z tels que z' soit un nombre réel.

b) Déterminer l'ensemble des points M d'affixe z tels que $|z'| = 1$.

c) Démontrer que :$(z' - i)(z - 2i) = -4 - 2i$. En déduire que lorsque le point M décrit le cercle $(\mathcal{C})$de centre A et de rayon $\sqrt{2}$, le point M' décrit un cercle $(\mathcal{C}')$ dont on déterminera le centre et le rayon.

Problème

Partie A

On considère la fonction g dérivable sur $\mathbb{R}$ et définie par : $g(x) = 2x^2 - 1 + (1 + x)e^{-x}$.

1- Calculer la limite de g en $+\infty$ et en $-\infty$.

2- a) Calculer $g'(x)$ pour tout nombre réel x.

c) En déduire les variations de g puis dresser son tableau de variation.

3- a) Démontrer que l'équation $x \in \mathbb{R}, g(x) = 0$ admet deux solutions dont l'une est 0.

b) Démontrer que $\alpha \in]-2; -1{,}9[$

c) Démontrer que si $x \in]-\infty; \alpha[, g(x) < 0$ et si$x \in]\alpha; +\infty[\setminus \{0\}, g(x) > 0$.

Partie B

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{cases} f(x) = 2x + \dfrac{1 - e^{-x}}{x} \quad si\ x \neq 0 \\ f(0) = 1 \end{cases}$$

De représentation graphique $(\mathcal{C})$ dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J), l'unité graphique est 2 cm.

1-a) Justifier que f est continue en 0.

b) On admet que f est dérivable en 0 et que $f'(0) = \frac{3}{2}$. Déterminer une équation de la tangente (T) à $(\mathcal{C})$ au point J.

2-a) Calculer la limite de f en $+\infty$ et en -∞.

b) Calculer la limite de$\frac{f(x)}{x}$en -∞.Interpréter graphiquement le résultat.

c) Démontrer que la droite (Δ) d'équation $y = 2x$ est asymptote à $(\mathcal{C})$ en $+\infty$.

d) Etudier les positions relatives de $(\mathcal{C})$et (Δ).

3- On admet que f est dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.

a) Calculer $f'(x)$ et vérifier que pour tout $x \neq 0, f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$.

b) En déduire les variations de f, puis dresser son tableau de variation.

4-On considère les fonctions H et K définies sur $\mathbb{R}$ par :

$H(x) = f(x) - \frac{3}{2}x - 1etK(x) = \frac{1}{2}x^2 - x + 1 - e^{-x}$

leSavoir.net

a) Vérifier que pour tout $x \neq 0, H(x) = \frac{K(x)}{x}$.
b) Calculer $K'(x)$ et $K''(x)$ pour tout nombre réel x.
c) En déduire les variations de K'.
d) Calculer $K'(0)$et $K(0)$.
En déduire le signe de $K'(x)$, les variations de K puis le signe de $K(x)$.
e) Etudier les positions relatives de (T) et $(\mathcal{C})$.

5-Tracer (Δ) et (T) puis construire $(\mathcal{C})$. On prendra $\alpha \simeq -1{,}9$.

leSavoir.net