BACCALAURÉAT — **Durée : 4 h**

SESSION 2000 — **Coefficient : 4**

MATHÉMATIQUES

SÉRIE : D

Cette épreuve comporte trois pages numérotées 1/3, 2/3 et 3/3.
Le candidat recevra trois feuilles de papier millimétré.
Toute calculatrice scientifique est autorisée.

Exercice 1

Dans le plan complexe muni du repère orthonormé (O,I,J), les points A et B ont pour affixes respectivement $\sqrt{3}+i$ et $-\sqrt{3}+i$. On désigne par S la similitude directe d'écriture complexe : $z' = \frac{3-i\sqrt{3}}{2}z - \sqrt{3} + i$.

1) Déterminer les images par S des points O et A.
2) Déterminer les éléments caractéristiques de S.
3) Soit $(\mathscr{C})$ le cercle de centre O et de rayon 2 et $(\mathscr{C}')$ son image par S.
   a) Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de $(\mathscr{C}')$.
   b) Construire $(\mathscr{C}')$.

Exercice 2

Une entreprise veut prévoir le nombre d'articles qu'elle aurait en stock en l'an 2004. L'évolution du stock de ses articles, au cours des sept dernières années des années 1990, est donnée par le tableau statistique ci-dessous :

Ordre x_i des années	1	2	3	4	5	6	7
Nombre y_i d'articles en stock	3810	3860	3940	4020	4100	4180	4220

1) A partir de quelle année l'entreprise s'est-elle intéressée à ses stocks ?
2) Représenter graphiquement le nuage de points de la distribution statistique définie par le tableau précédent, dans le plan muni du repère orthogonal (O,I,J). (*On prendra pour unité 2cm en abscisse et 200 articles pour 1cm sur la droite des ordonnées*).

3) Calculer les coordonnées du point moyen G de ce nuage de points.
   (*On prendra l'arrondi d'ordre zéro pour l'ordonnée de G*).
4) Déterminer par la méthode des moindres carrés, une équation de la droite de regression de y en x.
   (*On donnera l'arrondi d'ordre 1 du coefficient directeur de cette droite*).
5) Quel serait le nombre d'articles de l'entreprise en stock à l'année 2004 ?
   (*On en donnera la valeur approchée d'ordre 1 par excès du résultat*).

Problème

On considère la fonction f définie sur $]0;+\infty[$ par :

$$f(0)=0 \text{ et, si } x>0,\ f(x)=\frac{x^2}{2}+x-2x\ln x.$$

L'objet de ce problème est l'étude de f et le tracé de sa courbe représentative ($\mathscr{C}$) dans le plan muni du repère orthonormé (O,I,J) ; ln désigne la fonction logarithme népérien.

Partie A : *Etude d'une fonction auxiliaire*

On considère la fonction numérique g définie sur $]0;+\infty[$ par :

$$g(x)=x-1-2\ln x.$$

1) Calculer les limites respectives de g à droite en 0 et en $+\infty$.
2) On admet que la fonction g est dérivable sur $]0;+\infty[$ et on note g' sa dérivée.
   a) Déterminer g' et étudier son signe.
   b) En déduire le sens de variation de g et dresser son tableau de variation.
3) Vérifier que : $g(1)=0$.
4) Démontrer qu'il existe un unique réel α tel que : $\alpha \in]3;4[$ et $g(\alpha)=0$.

Partie B : *Détermination d'une valeur approchée de α*

On considère la fonction numérique h définie sur $]0;+\infty[$ par :

$$h(x)=2\ln x+1.$$

1) Démontrer que : $\forall x \in [3;4],\ h(x)\in[3;4]$.

2) On considère la suite (u_n) définie par : $\begin{cases} u_0 = 3{,}5 \\ u_{n+1} = h(u_n) \end{cases}$.

a) Démontrer que : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \in [3;4]$.

b) Calculer l'arrondi d'ordre 3 de u_1.

c) Démontrer par récurrence que la suite (u_n) est croissante.

d) En déduire que la suite (u_n) est convergente.

On admettra que (u_n) converge vers la valeur α précédente et on prendra $\alpha \approx 3{,}5$.

Partie C : *Etude de la fonction f*

1) Démontrer que la fonction f est continue à droite en 0.
2) La fonction f est-elle dérivable à droite en 0 ? Justifier.
3) En donner une interprétation graphique.
4) Calculer la limite de f en $+\infty$.
5) Calculer la limite de $\frac{f(x)}{x}$ quand x tend vers $+\infty$ puis interpréter graphiquement ce résultat.
6) La fonction f est dérivable sur $]0;+\infty[$ et on note f' sa dérivée.

   a) Démontrer que : $\forall x \in]0;+\infty[,\ f'(x) = g(x)$.

   b) En utilisant les résultats de la partie A, déterminer le signe de f'.

   c) Dresser le tableau de variation de f.
7) Tracer la courbe $(\mathscr{C})$.
8) Soit t un nombre réel tel que : $0 < t < 1$.

   a) En utilisant une intégration par parties, calculer l'aire $\mathscr{A}(t)$ de la partie du plan comprise entre la courbe $(\mathscr{C})$, la droite (OI) et les droites d'équations $x = t$ et $x = 1$.

   b) Calculer la limite de $\mathscr{A}(t)$ quand t tend vers 0.