BACCALAUREAT **Coefficient : 5**

SESSION 2005 **Durée : 4 heures**

MATHEMATIQUES

Série C

Cette épreuve comporte trois pages numérotées 1/3, 2/3 et 3/3.
Chaque candidat recevra deux (02) feuilles de papier millimétré.
Toute calculatrice scientifique est autorisée.

EXERCICE 1 (5 points)

L'unité graphique est le centimètre.
A et B sont deux points du plan tels que AB = 6.
G_1 est le barycentre des points pondérés (A ; 1) et (B ; 3).
G_2 est le barycentre des points pondérés (A ; 1) et (B ; -3).

1. a) Construire les points G_1 et G_2.
   b) Démontrer que l'ensemble (Γ) des points M du plan tels que $MA^2 - 9MB^2 = 0$ est le cercle de diamètre $[G_1G_2]$.
   c) Construire l'ensemble (E) des points M du plan tels que Mes $(\widehat{\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MB}}) = \frac{\pi}{3}$.

2. Soit C l'image du point B par la rotation de centre A et d'angle $\frac{2\pi}{3}$;

   D l'image du point B par l'homothétie de centre A et de rapport $\frac{2}{3}$;

   S la similitude directe qui applique A sur B et C sur D.
   a) Construire les points C et D.
   b) Calculer le rapport de S.
   c) Justifier qu'une mesure de l'angle de S est $\frac{\pi}{3}$.

3. On note Ω le centre de S.
   a) Démontrer que Ω appartient à (Γ) et à (E). Placer Ω.
   b) Démontrer que Mes $(\widehat{\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD}}) = \frac{-2\pi}{3}$.
   c) En déduire que les points A, C, D et Ω appartiennent à un même cercle ($\mathscr{C}$).
   Construire ($\mathscr{C}$).

EXERCICE 2 (3 points)

On sait par expérience qu'un tireur professionnel touche sa cible avec la probabilité 0,7.
Les tirs sont supposés indépendants.

Tous les résultats demandés seront donnés sous forme décimale exacte.

1. Le tireur effectue cinq tirs successifs. Calculer la probabilité pour qu'il touche sa cible :
   a) cinq fois ?
   b) exactement deux fois ?
   c) au moins une fois ?

Tournez la page S.V.P.

2. Il tire n fois de suite ($n \geq 1$). Démontrer que la probabilité pour qu'il touche la cible au moins une fois est égale à $1 - (0,3)^n$.

3. Combien faut-il de tirs au minimum pour que la cible soit touchée au moins une fois avec une probabilité supérieure ou égale à 0,995 ?

PROBLEME *(12 points)*

On considère la fonction f de IR vers IR définie par :

$$f(x) = \frac{x}{1+xe^x}.$$

On désigne par ($\mathscr{C}$) la courbe représentative de f dans le plan muni d'un repère orthogonal (O, I, J).

Partie I : Etude de f

1. Soit ψ la fonction dérivable sur IR et définie par : $\psi(x) = 1 + xe^x$.
   a) Etudier les variations de ψ puis dresser son tableau de variation. *(On ne demande pas de calculer les limites).*
   b) Démontrer que pour tout nombre réel x, $\psi(x) > 0$.
   c) En déduire l'ensemble de définition de f.

2. Soit φ la fonction dérivable sur IR et définie par : $\varphi(x) = 1 - x^2e^x$.
   a) Calculer les limites de φ en $-\infty$ et en $+\infty$.
   b) Etudier les variations de φ puis dresser son tableau de variation.
   c) Démontrer que l'équation $\varphi(x) = 0$ admet une solution unique α comprise entre 0,7 et 0,71.
   d) En déduire que :
      - $\forall x \in]-\infty ; \alpha[, \varphi(x) > 0;$
      - $\forall x \in]\alpha ; +\infty[, \varphi(x) < 0.$

3. On admet que f est dérivable sur IR.
   a) Démontrer que : $\forall x \in IR \ , \ f'(x) = \dfrac{\varphi(x)}{(1+xe^x)^2}$.
   b) Calculer les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$.
   c) Etudier les variations de f puis dresser son tableau de variation.

4. Soit (D) la droite d'équation $y = x$.
   a) Démontrer que (D) est asymptote à ($\mathscr{C}$) en $-\infty$.
   b) Etudier la position de ($\mathscr{C}$) par rapport à (D). (*On pourra utiliser la question I.1.b*).
   c) Démontrer que la droite (D) est tangente à ($\mathscr{C}$) au point d'abscisse 0.
   d) Tracer (D) et ($\mathscr{C}$) dans la fenêtre définie par :

   $X_{min} = -4,5$; $X_{max} = 4$

   $Y_{min} = -5$; $Y_{max} = 0,4$.

   On prendra : OI = 2cm ; OJ = 5cm et $\alpha = 0,7$.

Partie II : Etude d'une suite

Pour tout entier naturel n, on pose : $I_n = \int_0^1 \frac{t^n}{1+te^t} dt$.

1. a) Sans calculer I_1, en donner une interprétation graphique.
   b) Démontrer que la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.
   c) Démontrer que la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.
2. a) Démontrer que :
   $\forall\, t \in [\,0\,;1\,]\,, \qquad \frac{1}{1+e} \leq \frac{1}{1+te^t} \leq 1.$
   (On pourra utiliser les variations de ψ sur [0 ;1]).

   b) En déduire que pour tout entier naturel n, $\frac{1}{(1+e)(n+1)} \leq I_n \leq \frac{1}{(n+1)}$.
   c) Déterminer la limite de $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$.