BACCALAUREAT **Coefficient : 5**

SESSION 2006 **Durée : 4 h**

MATHEMATIQUES

SÉRIE : C

Cette épreuve comporte trois (03)pages numérotées 1/3, 2/3 et 3/3.
Chaque candidat recevra deux (02) feuilles de papier millimétré.
Toute calculatrice est autorisée.

EXERCICE 1

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2. On pose :

$A = n^2-2n+2$; $B = n^2+2n+2$ et $d = \text{pgcd}(A,B)$.

1- a) Démontrer que tout diviseur commun à A et n divise 2.

b) Démontrer que tout diviseur commun à A et B divise 4n.

2- On suppose que n est impair.

a) Démontrer que A et B sont impairs.
En déduire que d est impair.

b) Démontrer que d divise n.
En déduire que d divise 2, puis que A et B sont premiers entre eux.

3- On suppose que n est pair.

a) Démontrer que 4 ne divise pas A.

b) Démontrer que d est égal à 2p où p est un nombre entier impair.

c) Démontrer que p divise n. En déduire que d est égal à 2.

4- Déduire de ce qui précède que 197 et 257 sont premiers entre eux.

EXERCICE 2

On considère quatre points A, B, C et D tels que trois quelconques sont non alignés.

1- Démontrer que ABCD est un parallélogramme si et seulement si D est le barycentre du système $\{(A;1);(B;-1);(C;1)\}$.

2- On suppose que ABCD est un parallélogramme.
Déterminer puis construire l'ensemble E_1 des points M du plan tels que :
$\|\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\|=BD$.

3- On suppose que ABCD est un rectangle.
a) Démontrer que pour tout point M du plan,
$MA^2 - MB^2 + MC^2 = MD^2$.

b) Déterminer puis construire l'ensemble E_2 des points du plan tels que :
$MA^2 - MB^2 + MC^2 = BD^2$.

PROBLEME

L'objectif de ce problème est de démontrer que la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$\begin{cases} u_0 = -2 \\ u_{n+1} = \dfrac{e^{u_n}}{e^{u_n} + (\ln|u_n|)^2} \end{cases}, (n \in \mathbb{N})$$

converge vers 1.

Partie A

Soit g la fonction dérivable et définie de $\mathbb{R}^*$ vers $\mathbb{R}$ par : $g(x) = \ln|x| - \dfrac{2}{x}$.

1- a) Démontrer que pour tout nombre réel x non nul,
$g'(x) = \dfrac{x+2}{x^2}$.

b) En déduire les variations de la fonction g puis dresser son tableau de variation. *(On ne calculera pas les limites).*

2- a) Démontrer que l'équation $x \in \mathbb{R}$, $g(x) = 0$ admet une unique solution α appartenant à l'intervalle $]1\,;+\infty[$.

b) Démontrer que :

$\forall x \in]-\infty\,; 0[\cup]\alpha\,; +\infty[,\ g(x) > 0$;

$\forall x \in]0; \alpha[,\ g(x) < 0$.

Partie B

Soit f la fonction dérivable et définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{cases} f(x) = \dfrac{e^x}{e^x + (\ln|x|)^2} & \text{si } x \neq 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

(C) est la courbe représentative de f dans un repère orthonormé (O, I, J).
(L'unité graphique est 4 cm).

1- a) Étudier la continuité de f en 0.

b) Déterminer les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$ puis donner une interprétation graphique de chacun des résultats.

2- a) Étudier la dérivabilité de f en 0. En déduire que (C) admet une tangente à l'origine que l'on précisera.

b) Pour tout nombre réel x différent de zéro, démontrer que :

$f'(x) = \dfrac{\varphi(x)g(x)}{(e^x+(\ln|x|)^2)^2}$ avec $\varphi(x) = e^x\ln|x|$.

c) Démontrer que $f(\alpha) = \dfrac{\alpha^2}{\alpha^2+4e^{-\alpha}}$ et en déduire que : $0 < f(\alpha) < 1$.

d) Déterminer le signe de $f'(x)$ suivant les valeurs de x et en déduire le tableau de variation de f.

3- Démontrer que :

$\forall x \in \mathbb{R},\ 0 \leqslant f(x) \leqslant 1$.

4- Tracer la droite d'équation $y = x$ et la courbe (C).

PARTIE C

On considère la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie au début du problème.

1- Vérifier que : $\forall\, n \in \mathbb{N} \quad U_{n+1} = f(U_n)$.

2- A l'aide de la courbe (C), représenter U_0, U_1, U_2, U_3 et U_4 sur l'axe des abscisses.

3- Démontrer que pour tout entier naturel non nul n, $u_n \in [0 ; 1]$.

4- a) Démontrer par récurrence que $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement croissante.

b) Démontrer que $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente.

c) Démontrer que la limite de $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est égale à 1.
(On pourra utiliser les variations de f sur [0 ; 1]).