BACCALAUREAT **Coefficient : 4**
SESSION 2006 **Durée : 4 h**

MATHEMATIQUES

SÉRIE : D

Cette épreuve comporte trois (03) pages numérotées 1/3, 2/3 et 3/3.
Chaque candidat recevra deux (02) feuilles de papier millimétré.
Toute calculatrice est autorisée.

EXERCICE 1

Le plan est muni d'un repère orthonormé (O, I, J). L'unité est le centimètre. Soit A, B et C trois points d'affixes respectives Z_A, Z_B et Z_C tels que : $Z_A = 2 + 6i$; $Z_B = 4 + 2i$; $Z_C = 6i$.

1- Placer les points A, B et C dans le plan.

2- a) Déterminer la forme algébrique de $Z = \dfrac{Z_0 - Z_A}{Z_B - Z_A}$ où Z_0 est l'affixe de l'origine du repère.

b) Écrire Z sous forme trigonométrique.

c) Déterminer une mesure de l'angle orienté $(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AO}})$.

3- Soit r la rotation de centre B et d'angle $-\frac{\pi}{2}$.

a) Déterminer l'écriture complexe de r.

b) Déterminer l'image de O par r.

c) En déduire que le triangle OAB est rectangle et isocèle en B.

4- a) Déterminer le centre et le rayon du cercle (C) circonscrit au triangle OAB. Construire (C).

b) Démontrer que les points O, A, B et C appartiennent à un même cercle.

EXERCICE 2

Une banque dispose de guichets automatiques où certains clients peuvent faire des retraits d'argent à l'aide d'une carte magnétique. Chaque carte magnétique a un code secret connu seulement du titulaire de la carte. Ce code secret est une suite de quatre chiffres du système décimal.
Exemples de codes : 0375 ; 9918 ; 2400.

Les deux parties A) et B) suivantes sont indépendantes.

A)

1- Combien de cartes magnétiques la banque peut-elle distribuer à ses clients ?

2- Démontrer que la probabilité pour que le code d'une carte magnétique commence par 0 est égale à $\frac{1}{10}$.

3- Calculer la probabilité pour que le code d'une carte magnétique soit composé des chiffres 2 ; 4 ; 5 ; 7.

Tournez la page S.V.P.

B) Monsieur KONE, un client de la banque, titulaire d'une carte magnétique a oublié son code.

Son épouse lui rappelle que celui-ci comporte les chiffres 2 ; 4 ; 5 ; 7. il décide alors de tenter sa chance au guichet automatique.

Les guichets automatiques sont équipés de mémoires leur permettant de confisquer une carte après trois essais infructueux successifs. Monsieur KONE joue la prudence et s'impose deux essais au maximum.

1- Calculer la probabilité de chacun des évènements suivants :

a) E : « Monsieur KONE réussit à retirer de l'argent au premier essai ».

b) F : « Monsieur KONE échoue au premier essai et réussit au deuxième essai ».

2- Soit G l'évènement : « Monsieur KONE retire de l'argent ».
Démontrer que la probabilité de G est égale à $\frac{1}{12}$.

3- De retour à la maison, Monsieur KONE annonce fièrement à son épouse qu'il a pu retirer de l'argent au guichet automatique.
Calculer la probabilité qu'il ait effectué le retrait au premier essai.

4- La banque prélève une taxe pour chaque essai de retrait au guichet automatique. Cette taxe s'élève à 30 francs par essai fructueux et à 60 francs par essai infructueux.
X désigne la variable aléatoire qui détermine la taxe totale à payer sur l'ensemble des essais faits par Monsieur KONE.

a) Déterminer la loi de probabilité de X.

b) Démontrer que l'espérance mathématique de X est égale à 115 francs.

PROBLEME

A) Soit la fonction g dérivable et définie sur $]0\,;+\infty[$ par :

$g(x) = x^2 - \ln x - 1.$

1- Calculer les limites de g en 0 et en $+\infty$.

2- Démontrer que, pour tout nombre réel strictement positif x, $g'(x) = \frac{2x^2 - 1}{x}$.

3- Étudier les variations de g et dresser son tableau de variation.

4) a) Démontrer que l'équation $g(x) = 0$ admet deux solutions sur $]0\,;+\infty[$.
On désigne par α la plus petite des solutions.

b) Démontrer que $0{,}4 < \alpha < 0{,}5$.

c) Calculer $g(1)$.

d) En déduire que, pour tout nombre réel strictement positif x :

si $x \in]0\,;\alpha[\cup]1\,;+\infty[$ alors $g(x) > 0$.
si $x \in]\alpha\,;1[$ alors $g(x) < 0$.

B)

Soit f la fonction dérivable et définie sur] 0 ; $+\infty$ [par : $f(x) = x + \frac{2}{x} + \frac{\ln x}{x}$.

On note (C) sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthogonal (O, I, J). L'unité est 4 cm sur (OI) et 2 cm sur (OJ).

1- a) Déterminer la limite de f en 0. Donner une interprétation graphique du résultat.

b) Déterminer la limite de f en $+\infty$.

2- Démontrer que, pour tout nombre réel strictement positif x, $f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$.

3- a) Démontrer que $f(\alpha) = 2\alpha + \frac{1}{\alpha}$.

b) Étudier les variations de f et dresser son tableau de variation.

4- Démontrer que la droite (D) d'équation $y = x$ est asymptote à (C) en $+\infty$.

5- Étudier la position de (D) par rapport à (C).

6- Tracer (D) et (C) . *On prendra $\alpha = 0,45$ et $f(\alpha) = 3,1$.*

7- Soit *A* l'aire en cm² de la partie du plan délimitée par (C), (D) et les droites d'équations respectives $x = e^{-2}$ et $x = 1$.

Calculer *A*.