BAC Blanc 2006
MATHEMATIQUES
Série:T.C Durée: 4 heures coef:5

Exercice 1

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{u};\vec{v})$.On considère les points suivants :A(– 1; 4)
B(3; 4) C(5 ; 1), D(– 6; 0),I (milieu du segment [A ; C]) et J (milieu du segment [B ; D]).

1)) Soit K le barycentre des points pondérés (A ; 1) et (B ; 2) et L le point défini par $\overrightarrow{DC}-3\overrightarrow{DL}=\vec{0}$

Écrire L comme barycentre des points pondérés (C ; α) et (D ; β) avec $\alpha+\beta=1$.

2. Déterminer les coordonnées du milieu, G, du segment [K ;L]

3) Démontrer que G est le barycentre du système $\{(A;1);(B;2);(C;1);(D;2)\}$.

4) S est le milieu du segment [I ; J].

Déterminer et construire l'ensemble (E) des points M du plan vérifiant :

$$\left\|\overrightarrow{AM}+2\overrightarrow{BM}+\overrightarrow{CM}+2\overrightarrow{DM}\right\|=\frac{3}{2}\left\|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}\right\|$$

5) Soit (Γ) l'ensemble des points M du plan vérifiant : $MA^2+2MB^2+MC^2+2MD^2=\frac{1141}{6}$

a. Démontrer que pour tout point M du plan, on a : $MA^2+2MB^2+MC^2+2MD^2 = 6\,MG^2+\frac{817}{6}$

b. Déterminer et construire (Γ)

Exercice 2

1) Résoudre dans IC l'équation $z^4 = -1$
On donnera les solutions sous forme algébrique.

2) Le plan complexe est muni du repère orthonormé direct $(O;\overrightarrow{e_1};\overrightarrow{e_2})$.

On considère les points A B et C d'affixes respectives :

$$a=\frac{\sqrt{2}}{2} \qquad b=\sqrt{2}(1+i) \text{ et } c=\sqrt{2}(1-i)$$

a. On désigne par D le point d'affixe d tel que le point A soit le barycentre des points pondérés (C ;3) et (D ; 1).
Déterminer l'affixe de D

b. Soit E le point d'affixe e tel que le triangle BDE soit isocèle en B et tel que $\text{Mes}(\overrightarrow{BD},\overrightarrow{BE})=\frac{\pi}{2}$

b-1 Interpréter géométriquement $\text{ARG}\left(\frac{e-b}{d-b}\right)$ et $\left|\frac{e-b}{d-b}\right|$

b-2 En déduire la forme trigonométrique de $\frac{e-b}{d-b}$ puis l'affixe e de E

c- Soit I le milieu du segment [DE]
Démontrer que le quadrilatère BIEC est un carré

Problème

Partie A

On considère la fonction numérique f définie sur IR par :

$$f(x) = \frac{2e^{2x} - e^{x}}{e^{2x} - e^{x} + 1}$$

1) Démontrer que le point J (0 ;1) est un centre de symétrie de (C)
2) Étudier les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$.
3) En déduire les équations des asymptote à (C)
4) Calculer les coordonnées du point d'intersection A entre la courbe (C) et l'axe des abscisses
5) En déduire l'abscisse du point B d'ordonnée 2.
6) a) Résoudre dans IR l'inéquation $f(x) < 0$

   b) En déduire le signe de $f(x)$ suivant les valeurs de x
7) La droite (T) est tangente à (C) en J

   Donner son équation

Partie B

On considère la fonction numérique F, définie sur IR, par :

$$F(x) = \ln(e^{2x} - e^{x} + 1) - 1$$

1)
   a. Calculer $\lim_{x \to +\infty} F(x)$ et $\lim_{x \to -\infty} F(x)$
   b. Montrer que la courbe représentative de F, (Γ) admet deux asymptotes dont l'une est la droite (D) d'équation $y = 2x - 1$
2) a. Montrer que F est une primitive de f sur IR .

   b. Déduire de la partie A les variations de F et dresser son tableau de variation.
3) Donner l'équation de la tangente (Δ) à (Γ) au point M d'abscisse 0.
4) Tracer, dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$, (Γ), ses asymptotes et (Δ). (Unité graphique $\|\vec{i}\| = 1$ cm).