

Lycee Sainte Marie de Cocody
Terminales C₁ et C₂



Mercredi 22 Mars 2006

Durée : 4 heures

MATHEMATIQUES

EXERCICE 1

On considère la suite numérique $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par : $u_0 = 1$ et pour tout entier naturel n :

$$u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n + n - 1.$$

Soit $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par : pour tout entier naturel n , $v_n = 4u_n - 6n + 15$.

1°. Montrer que $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite géométrique dont on précisera la raison.

2°. Calculer v_0 puis v_n en fonction de n . En déduire que pour tout entier naturel n , $u_n = \frac{19}{4} \times \frac{1}{3^n} + \frac{6n-15}{4}$.

3°. Montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ peut s'écrire sous la forme $u_n = t_n + w_n$ où (t_n) est une suite géométrique et (w_n) une suite arithmétique.

4°. a. Calculer $T_n = t_0 + t_1 + \dots + t_n$ et $W_n = w_0 + w_1 + \dots + w_n$.

b. En déduire $U_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n$.

EXERCICE 2

On considère les nombres complexes z_n définis, pour tout entier naturel n , par :

$$z_0 = 1 \text{ et } z_{n+1} = \left(\frac{3}{4} + i \frac{\sqrt{3}}{4} \right) z_n \text{ et on note } A_n \text{ le point d'affixe } z_n.$$

1°. a. Calculer sous forme algébrique les nombres z_1 à z_6 .

b. Dans un repère d'unité 8 cm, placer les points A_0 jusqu'à A_6 .

2°. Pour tout entier naturel n , on pose $d_n = |z_{n+1} - z_n|$.

Vérifier que, pour tout $n \geq 1$: $z_{n+1} - z_n = \left(\frac{3}{4} + i \frac{\sqrt{3}}{4} \right) (z_n - z_{n-1})$.

b. En déduire une relation entre d_n et d_{n-1} , pour $n \geq 1$, puis exprimer d_n en fonction de n et d_0 .

c. Donner une interprétation géométrique de chacun des nombres d_n .

d. On pose $L_n = \sum_{k=0}^{n-1} A_k A_{k+1}$, la longueur de la ligne polygonale de sommets successifs $A_0, A_1, \dots, A_{n+1}$.

Déterminer L_n en fonction de n et la limite de L_n quand n tends vers $+\infty$.

3°. Pour tout entier naturel n , on pose $a_n = \arg(z_n) \pmod{2\pi}$.

a. Établir une relation entre a_n et a_{n-1} pour $n \geq 1$.

b. En déduire a_n en fonction de n .

c. Pour quelles valeurs de n , les points O, A_0 et A_n sont-ils alignés ?

PROBLEME

Soit f la fonction définie sur $[0; +\infty[$ par : $f(x) = 4x + 1 - xe^{2x}$.

On note (C) la courbe représentative de f dans un plan rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$, unité graphique : 4 cm.

Partie A : Étude de f et construction de (C)

- 1°. a. Calculer la dérivée f' et la dérivée seconde f'' de f .
- b. Étudier le signe de f'' . Calculer la limite de f' en $+\infty$ et dresser le tableau des variations de f' .
- c. Montrer que l'équation $f'(x) = 0$ admet une unique solution α comprise entre 0,79 et 0,8.
- d. Calculer la limite de f en $+\infty$ et dresser le tableau des variations de f .
- 2°. Construire la courbe (C).
- 3°. Montrer que l'équation $f(x) = 0$, possède une solution et une seule, que l'on notera β .

Vérifier que β est compris entre $\frac{3}{2}$ et 2.

- 4°. a. Soit u un nombre réel positif. Calculer $\int_0^u xe^x dx$ à l'aide d'une intégration par parties.

En déduire l'expression en fonction de u de $I_u = \int_0^u f(x) dx$.

- b. Utiliser l'égalité $f(\beta) = 0$, pour donner de I_β une expression en fonction de β ne contenant pas e^β .
- c. Quelle est l'interprétation géométrique de I_β ?

Partie B

On se propose de donner une valeur décimale approchée de β , c'est-à-dire de l'unique solution de l'équation $f(x) = 0$.

Pour obtenir cette valeur approchée, on considère la fonction h définie sur $\left[\frac{3}{2}; 2\right]$, par $h(x) = \ln\left(4 + \frac{1}{x}\right)$.

- 1°. a. Montrer que β est l'unique solution de l'équation $h(x) = x$.
- b. Étudier les variations de h . En déduire que pour tout nombre réel $x \in \left[\frac{3}{2}; 2\right]$, $h(x) \in \left[\frac{3}{2}; 2\right]$.
- c. Montrer que l'on a : pour tout nombre réel $x \in \left[\frac{3}{2}; 2\right]$, $|h'(x)| \leq \frac{1}{10}$.

En déduire que pour tout nombre réel $x \in \left[\frac{3}{2}; 2\right]$, l'on a : $|h(x) - \beta| \leq \frac{1}{10}|x - \beta|$.

- 2°. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = \frac{3}{2}$ et pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = h(u_n)$.

- a. Étudier graphiquement la convergence de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.
- b. Montrer que pour tout entier naturel n , $u_n \in \left[\frac{3}{2}; 2\right]$.
- c. En déduire que pour tout entier naturel n , $|u_{n+1} - \beta| \leq \frac{1}{10}|u_n - \beta|$.
- d. Montrer que pour tout entier naturel n , $|u_n - \beta| \leq \frac{1}{2 \times 10^n}$.
- e. Déterminer le plus petit entier p tel que $\frac{1}{2 \times 10^p} \leq 10^{-6}$. En déduire une valeur approchée de β à 10^{-6} près. Calculer à l'aide d'une calculatrice u_p .