

BACCALAUREAT
SESSION 2007

Coefficient : 4
Durée : 4 h

MATHÉMATIQUES

SERIE : D

*Cette épreuve comporte trois pages numérotées 1/3, 2/3 et 3/3.
Chaque candidat recevra deux (02) feuilles de papier millimétré.
Toute calculatrice est autorisée.*

EXERCICE 1

On considère les suites (U_n) et (V_n) définies par $U_0 = 4$ et $V_0 = 9$ et pour tout entier naturel n :

$$U_{n+1} = \frac{2U_n V_n}{U_n + V_n} \quad \text{et} \quad V_{n+1} = \frac{1}{2}(U_n + V_n)$$

1. Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n , $U_n > 0$ et $V_n > 0$.
2. a) Démontrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, V_{n+1} - U_{n+1} = \frac{(V_n - U_n)^2}{2(U_n + V_n)}$.
 b) En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}, U_n \leq V_n$
 et que : $V_{n+1} - U_{n+1} \leq \frac{1}{2}(V_n - U_n)$.
 c) En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}, V_n - U_n \leq \frac{5}{2^n}$.
3. a) Démontrer que la suite (U_n) est croissante et que la suite (V_n) est décroissante.
 b) En déduire que les suites (U_n) et (V_n) convergent.
 c) Démontrer que les suites (U_n) et (V_n) ont la même limite ℓ .
4. a) Démontrer que pour tout entier naturel n , $U_{n+1} V_{n+1} = U_n V_n$.
 b) En déduire la valeur exacte de ℓ .

EXERCICE 2

Une population d'élèves comportant 40% de bacheliers a subi un test de recrutement en première année d'une grande école.

Ce test a donné les résultats suivants :

- 75% des bacheliers sont admis ;
- 52% des non bacheliers sont admis.

Partie A

On choisit au hasard un élève de la population. On note :

B l'événement : «l'élève est bachelier» ;

T l'événement : «l'élève est admis au test» ;

A l'événement : «l'élève est bachelier et est admis au test».

1. Préciser chacune des probabilités suivantes :
 - a) la probabilité $P(B)$ de l'événement B ;
 - b) la probabilité $P_B(T)$ de T sachant que B est réalisé ;
 - c) la probabilité de $P_{\bar{B}}(T)$ sachant que B n'est pas réalisé.
2. Démontrer que la probabilité de l'événement A est égale à 0,3.
3. Calculer la probabilité de l'événement T.
4. Dédurre des questions précédentes que les événements B et T ne sont pas indépendants.
5. Démontrer que la probabilité pour qu'un élève admis au test soit bachelier est égal à $\frac{25}{51}$.

Partie B

On choisit au hasard 5 élèves de la population étudiée.

On note X la variable aléatoire égale au nombre d'étudiants bacheliers et admis au test parmi les 5 choisis.

1. Démontrer que la probabilité pour que 3 seulement des 5 élèves choisis soient bacheliers et admis au test est égale à 0,1323.
2. Calculer l'espérance mathématique de X.

PROBLEME

L'objet de ce problème est l'étude de chacune des fonctions f, g et h définies ci-dessous.

- f est la fonction dérivable et définie sur $\mathbb{R} - \{-1\}$ par :

$$f(x) = \frac{x-3}{x+1}$$
- g est la fonction définie sur l'ensemble $D_g = \left[0, \frac{1}{e}\right[\cup \left] \frac{1}{e}, +\infty\right[$, par :

$$g(x) = f(\ln x) \text{ et } g(0) = 1.$$
- h est la fonction dérivable sur \mathbb{R} et définie par $h(x) = f(e^x)$.

Partie A

1. Démontrer que :
 - a) $\forall x \in D_g \text{ et } x \neq 0, g(x) = 1 - \frac{4}{\ln x + 1}$;
 - b) $\forall x \in \mathbb{R}, h(x) = 1 - \frac{4}{e^x + 1}$.

