

Collège André Malraux	DEVOIR DE MATHEMATIQUES TD2 ET TD3	Année scolaire 2006-2007 Durée 4H Date : 09/1 ^{er} /2007
-----------------------	--	--

Exercice 1 (3pts)

Soit f la fonction définie sur $]-\infty; \frac{3}{2}]$ par :

$$f(x) = x\sqrt{3-2x}$$

Soit F la fonction définie sur $]-\infty; \frac{3}{2}]$ par :

$$F(x) = (ax^2 + bx + c)\sqrt{3-2x}$$

1/ pour tout x de $]-\infty; \frac{3}{2}]$, calculer $F'(x)$

2/ trouver 3 nombres réels a, b, c pour que la fonction F soit une primitive de f sur $]-\infty; \frac{3}{2}]$

Exercice 2 (5pts)

1/ soit $f(x) = x(1 - \ln(x))^2$

a/ vérifier que : $f(x) = (\sqrt{x} - 2\sqrt{x} \ln(\sqrt{x}))^2$

b/ calculer $\lim_{x \rightarrow 0} x(1 - \ln(x))^2$

2/ calcul les limites suivantes :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x - \ln x} ; \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x^3+1)}{x^3}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x - 1 + 3 \ln x}{x - \ln x} ; \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x+1)}{\sqrt{x}}$$

Problème (12 points)

Partie A : soit la fonction polynôme

$$g: x \mapsto 4x^3 - 9x^2 + 6x + 1$$

1/ étudier le sens de variation de g et dresser son tableau de variation.

2/ a/ démontrer que l'équation : $x \in \mathbb{R}, g(x) = 0$ admet une solution unique α

b/ vérifier que $\alpha \in]-1; 0[$

c/ déterminer un encadrement de α à $0,1$ près par la méthode du balayage.

3/ démontrer que :

- $\forall x \in]-\infty; \alpha[, g(x) < 0$
- $\forall x \in]\alpha; +\infty[, g(x) > 0$

Partie B : on considère la fonction numérique f

Définie par : $\begin{cases} \text{si } x \in]-\infty, 1[, f(x) = 2x^2 - x - \frac{2}{x-1}, \\ \text{Si } x \in]1; +\infty[, f(x) = x - \frac{2}{x-1} \end{cases}$

(C1) et (C2) sont respectivement les courbes représentatives de f sur les intervalles $]-\infty, 1[$ et $]1; +\infty[$, dans le plan muni du repère orthonormé (O, I, J)

Unités 2 cm

1/ a/ démontrer que pour tout réel x de $]-\infty, 1[$, $f'(x) = \frac{g(x)}{(x-1)^2}$

Utiliser la partie A pour déterminer le sens de variation de f sur l'intervalle $]-\infty, 1[$;

b/ Etudier le sens de variation de f sur l'intervalle $]1; +\infty[$

2/a/ calculer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition

b/ dresser le tableau de variation de f

3/a/ démontrer que la droite (Δ) d'équation $y = x$ est asymptote à (C2) au voisinage de $+\infty$

b/ étudier la position relative de (C2) par rapport à (Δ)

4/calculer $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x}$. Interpréter graphiquement le résultat

5/déterminer les coordonnées des points d'intersection

- de (C1) avec l'axe des ordonnées
- de (C2) avec l'axe des abscisses

6/ représenter f dans un repère (O, I, J)

7/ soit h la restriction de f à l'intervalle $]1; +\infty[$

a/ justifier que h est une bijection de $]1; +\infty[$ sur $\mathbb{R}$

b/ on note h^{-1} , la bijection réciproque de h

calculer $h^{-1}(0)$ et $(h^{-1})'(0)$. En déduire une équation de la tangente à la courbe de h^{-1} au point d'abscisse 0

c/ représenter h^{-1} dans le même repère que f

Bonne et Heureuse Année 2007