Année Scolaire :2010-2011
Classe de Tle D ; Durée : 2h

DEVOIR DE MATHEMATIQUES

Vendredi 4 mars 2011

Exercice 1 :

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O,\vec{u},\vec{v})$; unité graphique : $2cm$.

I)-1) résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation :

(E): $z^2-(3+4i)z-1+7i=0$

On considère le polynôme complexe $P(z)$ défini par :

$$P(z)=z^3-2(1+2i)z^2-(4-3i)z-1+7i$$

2) Démontrer que l'équation $P(z)=0$ admet une solution réelle notée α.
3) Déterminer le polynôme Q tel que $P(z)=(z+1)Q(z)$
4) Résoudre l'équation : $z\in\mathbb{C},\ P(z)=0$

II) on désigne par A, B et C les points d'affixes respectives $2+i$; $3+2i$ et $1+3i$

1- Démontrer que ABC est un triangle isocèle.
2- Déterminer l'affixe du point D tel que ABCD soit un parallélogramme.

III) on donne les points E et F d'affixes respectives -1 et $2i$; le point M d'affixe z et M' d'affixe $z'=\frac{z-2i}{z+1}$

1-a) Interpréter géométriquement $|z'|$

b) Déterminer et construire l'ensemble des points M d'affixe z tel que $|z'|=1$

2- Soit $z=x+iy$

a) Ecrire sous forme algébrique z'
b) Déterminer et construire l'ensemble (Γ) des points M tel que z' soit réel.
c) Déterminer et construire l'ensemble (Γ') des points M tel que z' soit imaginaire pur.

Exercice 2 :

PARTIE A

On donne la fonction P définie sur $\mathbb{R}$ par : $P(x)=e^{2x}-5e^x+4$

1- Résoudre dans R l'équation $P(x)=0$
2- Démontrer que : $\begin{cases}\forall x\in\ ]-\infty;0]\cup[ln4;+\infty[, P(x)\geq 0\\ \forall x\in[0;ln4]\quad ,\quad P(x)\leq 0\end{cases}$

PARTIE B

Soit la fonction f de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ telle que $f(x)=x-1+\frac{1}{e^x-2}$

On désigne par (C) sa courbe représentative dans le plan muni du repère orthonormé $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$ d'unité graphique :$2cm$.

1- Déterminer l'ensemble de définition de f.
2- Calculer les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$.
3- Calculer les limites de f à gauche et à droite en $ln2$. Interpréter graphiquement les résultats.
4- On admet que f est dérivable en tout points de son ensemble de définition et on note f' sa dérivée.

a- $\forall x\in\ ]-\infty;ln2[\cup]ln2;+\infty[, f'(x)=\frac{P(x)}{(e^x-2)^2}$

b- Etudier le signe de $f'(x)$ suivant les valeurs de x et en déduire le sens de variation de f

5- Démontrer que la droite (Δ) d'équation $y=x-1$ est une asymptote oblique à $(C)en+\infty$
6- Démontrer que $\forall x\in\ ]-\infty;ln2[\cup]ln2;+\infty[, f(x)=x-\frac{3}{2}+\frac{e^x}{2(e^x-2)}$
7- Démontrer que la droite (D) d'équation $y=x-\frac{3}{2}$ est une asymptote oblique à $(C)en-\infty$
8- Etudier la position relative de (C) par rapport à (Δ) sur $]-\infty;ln2[$.
9- Construire (C).