COLLEGE ANDRE MALRAUX	DST MATHEMATIQUES T^{le} D	Année scolaire : 2010-2011 Date : 24/06/2011 Durée : 4 heures

EXERCICE 1 : *Nombres complexes et transformation du plan*

Le plan est muni d'un repère orthonormé (O, I, J) l'unité est le centimètre
Soit A, B et C trois ponts d'affixes respectives Z_A , Z_B, Z_c tels que $Z_A = 2 + 6\,i$
$Z_B = 4 + 2i$; $Z_C = 6i$

1) Placer les points A , B et C dans le plan
2)
   a- Déterminer la forme algébrique de $Z = \dfrac{Z_0 - Z_A}{Z_B - Z_A}$ où Z_0 est l'affixe de l'origine du repère
   b- Ecrire Z sous la forme trigonométrique.
   c- Déterminer une mesure de l'angle orienté $(\overrightarrow{AB}\,;\,\overrightarrow{AO})$

3) Soit r la rotation de centre B et d'angle $-\dfrac{\pi}{2}$
   a- Déterminer l'écriture complexe de r
   b- Déterminer l'image de O par r
   c- En déduire que le triangle OAB est rectangle et isocèle en B
4)
   a- Déterminer le centre et le rayon du cercle circonscrit au triangle OAB
   Construire (C)
   b- Démontrer que les points O, A , B et C appartiennent à un même cercle

EXERCICE 2 : *Statistiques*

A cause de la propagation de la grippe aviaire (Maladie du poulet due au virus H5N1) dans les pays de l'Afrique de l'Ouest, les fermes avicoles ont de plus en plus de difficultés à écouler leurs productions.
Le prix unitaire du poulet chute chaque mois et la demande aussi.
Pour suivre cette évolution afin d'anticiper d'éventuelles pertes , le responsable de la ferme industrielle ANOUAZE d'EBILASSOKRO a recueilli sur les 8 derniers mois consécutifs les informations regroupées dans le tableau suivant.

Le prix unitaire x_i en centaine de francs CFA du poulet	30	26	28	27	26	25	24	23
Le nombre y_i en centaine de poulet	70	69	66	63	62	60	58	57

1/ Représenter le nuage de points associé à cette série. Origine A (20 ; 55)
Echelle : 2 cm pour 1 centaine de francs CFA sur (ox)
1 cm pour 1 centaine de poulet sur (oy)
2/ a) Calculer les coordonnées du point moyen G de ce nuage de points
b) Calculer les variances V(x) et V(y) de x et y
c) Calculer la covariance cov (x , y) entre les variables x et y
d) Calculer le coefficient de corrélation linéaire r entre les variables x et y. vérifier que la valeur r justifie un ajustement linéaire du nuage de points.
3/ Justifier que une équation de la droite de régression de y en x est
y= 1,96 x + 11,07 (les coefficients ont été arrondis à l'ordre 2)

PROBLEME

PARTIE A : *Equation différentielle*

1) (E_0) désigne l'équation différentielle : $Y' - Y = 0$

   Déterminer les solutions générales de E_0

2) (E) est l'équation différentielle : $Y' - Y = x + 1$
   a- Vérifier que la fonction h définie sur R par $h(x) = - x - 2$ est une solution particulière de (E)
   b- Démontrer que f est une solution de (E) si et seulement si f-h est solution de (E_0).
   c- Déterminer toutes les solutions de (E)
   d- Déterminer la fonction f_0 de (E) satisfait à la condition $f_0(0) = 0$

PARTIE B : *Etude d'une fonction auxiliaire*

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$g(x) = 2e^x - x - 2$

1) Déterminer la limite de g en $-\infty$ et en $+\infty$
2) Etudier le sens de variation de g, puis dresser son tableau de variation.
3) a) Calculer g(0)
   b) Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique α dans l'intervalle $]-\infty, \ln 2]$ et vérifier que $-1,6 \leq \alpha \leq -1,5$

4) Démontrer que $\begin{cases} \forall X \in [\alpha ; 0[, g(x) < 0 \\ \forall X \in]-\infty ; \alpha[\cup [0 ; +\infty[, g(x) > 0 \end{cases}$

PARTIE C : *Etude de la fonction principale*

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^{2x} - (x+1)e^x$
1) Calculer limite de f en $-\infty$ et en $+\infty$
2) Montrer que $\forall X \in \mathbb{R}$; $f'(x) = e^x g(x)$
3) Etudier le sens de variation de f, puis dresser son tableau de variation

4) a- Montrer que $f(\alpha) = -\dfrac{\alpha^2 + 2\alpha}{4}$

   b- En déduire un encadrement de $f(\alpha)$ tel que $0,11 < f(\alpha) < 0,24$

5) Tracer la courbe (C), représentative de f dans le plan rapporté à un repère orthonormé (Unité graphique 2 cm).

PARTIE D : *Primitive et calcule d'intégrales*

On donne $h(x) = x\,e^x$ et $F(x) = (ax + b)\,e^x$

1) Déterminer a et b tels que F soit une primitive de h
2) Soit m un nombre réel négatif

a) Calculer $K = \int_m^0 x\,e^x\,dx$

b) En déduire $L(m) = \int_m^0 f(x)\,dx$

c) Calculer $\lim_{m \to -\infty} \int_m^0 f(x)\,dx$