



Construire l'avenir en s'appuyant sur le passé



Année scolaire 2010-2011	 MATHEMATIQUES N°6	Jeudi 23 Juin 2011	
Lycée Sainte Marie Cocody		Classe : T ^{le} D ₁	Durée : 2 H

Exercice 1 : (5 points)

$z \in \mathbb{C}$; $z = x + iy$ avec $x \in \mathbb{R}$; $y \in \mathbb{R}$ et $(x ; y) \neq (-1 ; 0)$. Soit u le complexe défini par : $u = \frac{z-i}{z+1}$.

- On note $u = X + iY$ avec $X \in \mathbb{R}$ et $Y \in \mathbb{R}$. Exprimer X et Y en fonction de x et y .
- Déterminer les ensembles (E_1) ; (E_2) et (E_3) des points M du plan tels que :
 - u soit un imaginaire pur (E_1) ;
 - u soit réel (E_2) ;
 - u soit réel et strictement positif (E_3) .
- Représenter (E_1) ; (E_2) et (E_3) dans le plan muni d'un repère orthonormé d'unité graphique 2 cm.

Exercice 2 : (6 points)

- Ecrire sous la forme trigonométrique le nombre complexe $v = -\frac{\sqrt{2}}{2}(\sqrt{3} - i)$.
 - En déduire la forme algébrique de v^{2011} .
 - Déterminer les entiers naturels n pour lesquels v^n est un réel.
- Déterminer toutes les racines sixièmes de $w = -4\sqrt{2}(1-i)$.
 - Représenter les points-images des solutions dans le plan muni d'un repère orthonormé d'unité 4 cm.

Exercice 3 : (9 points)

- Soit le polynôme complexe $P(z) = z^3 - (6+2i)z^2 + (12+9i)z - 9 - 13i$.
 - Trouver le nombre réel a tel que $P(1+ai) = 0$.
 - Déterminer les complexes b et c tels que $P(z) = (z-1-2i)(z^2 + bz + c)$.
 - Résoudre dans \mathbb{C} l'équation d'inconnue z : $P(z) = 0$.
- Le plan est muni d'un repère orthonormé direct (O, I, J) d'unité 2 cm. On donne les points A, B, C et D d'affixes respectives $1+2i$; $3+i$; $2-i$ et $1-i$.
 - Calculer $Z = \frac{z_C - z_B}{z_A - z_B}$ et en déduire la nature du triangle BAC.
 - Démontrer que les points A, B, C et D appartiennent à un même cercle dont on déterminera le centre E et le rayon r .
- Soit (\mathcal{E}) l'ensemble des points M du plan dont l'affixe $z = x + iy$ (avec x et y deux réels) vérifie :

$$|z - 5i| = |3z - 4 - 3i|$$
 - Vérifier qu'une équation cartésienne de l'ensemble (\mathcal{E}) est $x^2 + y^2 - 3x - y = 0$
 - En déduire la nature et les éléments caractéristiques de l'ensemble (\mathcal{E}) .
- Faire la figure complète d'après toutes les données de l'exercice.