Construire l'avenir en s'appuyant sur le passé

Année scolaire 2011-2012	DST	Mercredi 1er Février 2012	
Lycée Sainte Marie Cocody	MATHEMATIQUES N°2	Classe : Tle D	Durée: 4 H

Exercice 1 : (6,5 points)

Une urne contient : une boule noire ; une boule verte ; une boule rouge ; deux boules blanches et trois boules jaunes.

Les boules sont indiscernables au toucher.

Une partie consiste à extraire simultanément deux boules de l'urne. La partie est dite gagnée si le joueur extrait deux boules de même couleur.

I - 1. On donne les événements suivants : A : « on extrait deux boules jaunes » ; B : « extraire deux boules de couleurs différentes » et C : « on extrait au moins une boule blanche ».

a) Calculer la probabilité de l'événement A.

b) Vérifier que la probabilité de l'événement B est $P(B)=\frac{6}{7}$.

c) Calculer la probabilité de l'événement C.

2.a) Les événements A et B puis B et C sont-ils incompatibles ?

b) Vérifier que $P(B\cap C)=\frac{3}{7}$. Les événements B et C sont-ils indépendants ?

c) Calculer la probabilité de l'événement D : « on extrait au moins une boule blanche ou deux boules de couleurs différentes ».

3. Un joueur extrait deux boules de couleurs différentes. Quelle est la probabilité qu'il ait obtenu une boule blanche ?

II - Soit X la variable aléatoire qui, à chaque partie, associe le nombre de boules jaunes tirées.

1. a) Déterminer les valeurs prises par X.

b) Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire X.

2. Calculer l'espérance mathématique $E(X)$ et vérifier que l'arrondi d'ordre 3 de l'écart-type $\sigma(X)$ de la variable aléatoire X est $0,634$.

III - Un joueur effectue 10 parties dans les mêmes conditions.

1. Montrer que la probabilité qu'il gagne exactement 4 de ses parties est $P_4=\frac{5\times 6^7}{7^9}$.

2. Montrer que l'arrondi d'ordre 3 de la probabilité qu'il gagne au moins une de ses parties est $0,786$.

Exercice 2 : (3,5 points)

Soient u et v les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par : $u(t)=3t\cos^2(t^2+1)-\frac{5}{2}$ et $v(t)=-2t\sin^2(t^2+1)+\frac{1}{3}t$.

On note U et V les primitives respectives sur $\mathbb{R}$ des fonctions u et v.

1. a) Calculer $2u(t)-3v(t)$ pour tout réel t.

b) En déduire une primitive sur $\mathbb{R}$ notée $2U-3V$ de la fonction $2u-3v$.

2. a) Montrer que : $2u(t)+3v(t)=\cancel{12t}\cos\left[2(t^2+1)\right]+t-5$
6t

b) En déduire une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction $2u+3v$.

3. Déduire des questions précédentes, $U(t)$ et $V(t)$.

Problème : (10 points)

Soit f la fonction définie par : $f(x)=-\frac{1}{2}x+1+\frac{1}{2}\sqrt{|x^2-1|}$. On désigne par (C_f) sa représentation graphique dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O;I;J)$ d'unité graphique 3cm.

1. a) Justifier que $D_f=\mathbb{R}$ puis écrire $f(x)$ sans le symbole de la valeur absolue.

b) Calculer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition. Interpréter s'il y a lieu le résultat.

2. a) Etudier la continuité de f en 1 et en -1.

. b) Etudier la dérivabilité de f en 1 et en -1. En déduire l'ensemble de dérivabilité de la fonction f.

3. Montrer que la droite (D) d'équation $y=-x+1$ est une asymptote oblique à (C_f) en $-\infty$.

4. a) Vérifier que l'inéquation : $x\in]-1\,;1[\ ,\ -\sqrt{1-x^2}-x\geq 0$ a pour solution $\left]-1\,;-\frac{\sqrt{2}}{2}\right]$;

. b) En déduire les solutions de l'inéquation : $x\in]-1\,;1[\ ,\ -\sqrt{1-x^2}-x<0$

5. a) Justifier (sans résoudre) que : $\forall x\in]-\infty\,;-1[\ ,\ x-\sqrt{x^2-1}<0$

b) Résoudre l'inéquation : $x\in]1\,;+\infty[\ ,\ x-\sqrt{x^2-1}>0$

6.a) Vérifier que : $\forall x\in]-\infty\,;-1[\cup]1\,;+\infty[\ ,\ f'(x)=\dfrac{x-\sqrt{x^2-1}}{2\sqrt{x^2-1}}$

$\forall x\in]-1\,;1[\ ,\ f'(x)=\dfrac{-x-\sqrt{1-x^2}}{2\sqrt{1-x^2}}$

b) Déduire des questions 4 et 5, le signe de $f'(x)$ suivant les valeurs du réel x.

c) Donner les variations de f puis dresser son tableau de variations.

7. Construire, dans le repère $(O;I;J)$: (C_f) , toutes ses asymptotes et ses tangentes aux points d'abscisses
(C_f)
respectives -1 ; 1 et $-\frac{\sqrt{2}}{2}$.

8. Soit g la restriction de f à $\left[-\frac{\sqrt{2}}{2}\,;1\right]$

. a) Montrer que g est une bijection de $\left[-\frac{\sqrt{2}}{2}\,;1\right]$ sur un intervalle K à préciser.

.b) Dresser le tableau de variations de la bijection réciproque g^{-1} de g.

9. Calculer $g(0)$ et en déduire $(g^{-1})'\left(\frac{3}{2}\right)$.

10. Soit (Γ) la représentation graphique de g^{-1}.

. a) Déterminer une équation de la tangente (T) à (Γ) au point d'abscisse $\frac{3}{2}$.

. b) Construire (Γ) ~~et (C_f)~~ dans le même repère $(O;I;J)$. On construira avec précision les tangentes à (Γ) aux points d'abscisses respectives $\frac{2+\sqrt{2}}{2}$ et $\frac{1}{2}$.