

EMPT-Bingerville ~ EMPT-Bingerville ~ EMPT-Bingerville ~ EMPT-Bingerville ~ EMPT-Bingerville

BACCALAURÉAT BLANC
SESSION D'AVRIL - SÉRIE D

ANNÉE SCOLAIRE : 2012-2013
DURÉE : 4 H 00 / Coeff. : 4

ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

*Cette épreuve comporte 02 pages numérotées 1/2 et 2/2.
Le candidat recevra deux feuilles de papier millimétré.*

Exercice 1 :

On considère la suite (U_n) définie par : $U_n = \int_0^1 \frac{e^{-nx}}{e^x + 1} dx$.

1. Démontrer que $U_0 = \ln\left(\frac{2e}{e+1}\right)$.
2. Justifier que les termes U_n sont positifs.
3. Démontrer que la suite (U_n) est décroissante.
4. En déduire que la suite (U_n) est convergente.
5. Soit la suite (V_n) définie par $V_n = \int_0^1 e^{-nx} dx$.
 - a. Calculer V_n en fonction de n .
 - b. Démontrer que $U_n \leq \frac{1}{2} V_n$.
 - c. Déterminer alors la limite de la suite (U_n) .

Exercice 2 :

(Les résultats statistiques seront donnés à 10^{-2} près).

Le tableau suivant recense, par clinique, le nombre de postes de personnel non médical en fonction du nombre de lits de la clinique.

Clinique	C ₁	C ₂	C ₃	C ₄	C ₅	C ₆	C ₇	C ₈	C ₉	C ₁₀	C ₁₁
Nombre de lits X	122	177	77	135	109	88	185	128	120	146	100
Nombre de postes Y	205	249	114	178	127	122	242	170	164	188	172

1. Construire le nuage de points $M_i(x_i; y_i)$ correspondant à cette série statistique.

Unités graphiques :

En abscisse : 1cm pour 10 lits ;
En ordonnée : 1 cm pour 20 postes.

2. Calculer les coordonnées du point moyen G du nuage et le placer sur le graphique.
3. Calculer le coefficient de corrélation linéaire r . Un ajustement affine est-il justifié ?
4. Déterminer une équation de la droite de régression (D) de y en x par la méthode des moindres carrés.
Tracer la droite (D) sur le graphique. (Marquer les points utilisés pour tracer (D)).
5. Une clinique possède 25 lits. En utilisant les résultats de la question 4, à combien peut-on estimer, par calcul, le nombre de postes de personnel non médical ?
Illustrer sur le graphique.

PROBLEME :

Partie A :

Soit la fonction f définie sur $[0; +\infty[$ par :
$$\begin{cases} f(x) = x(\ln x)^2 & \text{si } x > 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

On note $(\mathcal{C})$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1. a. Vérifier que pour $x > 0$, $f(x) = 4(\sqrt{x} \ln \sqrt{x})^2$ et en déduire que f est continue en 0.
b. Pour $x > 0$, calculer $f'(x)$.
c. Etudier la limite de $\frac{f(x)}{x}$ quand x tend vers 0 ; interpréter graphiquement le résultat.
d. Etudier la fonction f (sens de variation, limite en $+\infty$, tableau de variation).
2. a. Etudier le position de la courbe $(\mathcal{C})$ par rapport à la droite (D) d'équation $y = x$; on précisera les coordonnées de leurs points communs.
b. Déterminer une équation de la tangente $(\mathcal{T})$ à la courbe $(\mathcal{C})$ au point d'abscisse e^{-1} .
c. Déterminer le sens de variation de la fonction g qui à tout réel positif x associe $g(x) = f(x) - \left(\frac{2}{e} - x\right)$. Calculer $g(e^{-1})$ et en déduire la position de $(\mathcal{C})$ par rapport à $(\mathcal{T})$.
d. Tracer (D), $(\mathcal{T})$ et $(\mathcal{C})$ dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ (unité : 5 cm).

Partie B :

Pour $x > 0$, on pose : $F(x) = \int_1^x f(t) dt = \int_1^x t(\ln t)^2 dt$ et $I(x) = \int_1^x t \ln t dt$.

1. Montrer que $F(x) = \frac{1}{2}(x \ln x)^2 - I(x)$ (on pourra utiliser une intégration par parties).
2. A l'aide d'une intégration par parties, calculer $I(x)$ et en déduire sur $]0; +\infty[$, la primitive de f qui s'annule pour $x = 1$.
3. Calculer $F\left(\frac{1}{e}\right)$; en déduire la valeur du réel : $J = \int_{\frac{1}{e}}^1 f(t) dt$.
4. On rappelle que l'unité choisie est 5 cm. Calculer en cm^2 , l'aire de l'ensemble des points $M(x; y)$ tels que
$$\begin{cases} \frac{1}{e} \leq x \leq 1 \\ f(x) \leq y \leq x. \end{cases}$$

Partie C :

Soit la suite (V_n) définie sur $\mathbb{N}^*$ par : $V_n = \frac{(\ln n)^2}{n}$.

1. Vérifier que pour tout entier naturel n non nul, on a : $V_n = f\left(\frac{1}{n}\right)$ et en déduire la limite de la suite (V_n) .
2. Montrer que pour tout entier naturel $n \geq 8$, on a $V_{n+1} \leq V_n$ (on utilisera le sens de variation de f sur $[0; e^{-2}]$).
3. On pose, pour $n \geq 8$, $S_n = \sum_{p=8}^n V_p$.
a. Démontrer que $S_n \geq (n-7)V_n$.
b. En déduire que S_n tend vers $+\infty$ quand n tend vers $+\infty$.