LYCEE SAINTE MARIE COCODY ANNEE SCOLAIRE 2013 - 2014

Date : 20/11/13

DST de MATHEMATIQUES TLE D

DUREE : 4 heures

EXERCICE 1

1°) Ecrire le nombre réel A ci-dessous sous la forme $a + b\sqrt{3}$ où a et b $\in \mathbb{Z}$.

$$A = (2 - 3\sqrt{3})^6$$

2°) Soit l'équation (E) : $n \in \mathbb{N}$, $3A_n^2 - 2C_{n+1}^3 = 5n - 10$.

a) Déterminer l'ensemble de validité, V de (E).
b) Justifier que (E) est équivalente à l'équation (E') : $n \in V$; $-(n-6)(n^2 - 3n + 5) = 0$.
c) Résoudre (E') puis déduire les solutions de (E).

EXERCICE 2

Le panier à fruits de TATO contient six oranges, quatre mangues et une pomme donnant chacun, à TATO, la même envie d'être dégustée.

Les questions 1, 2 et 3 sont indépendantes.

1/ TATO choisit au hasard et en même temps trois fruits du panier. Calculer la probabilité de chacun des évènements suivants :

A_1 : « Aucune orange n'est choisie »
A_2 : « deux fruits de même variété sont choisis »
A_3 : « au plus deux oranges sont choisies »
A_4 : « au moins une mangue est choisie »
A_5 : « deux fruits de même variété ou au moins une mangue sont choisis »

2 / TATO décide de manger un fruit le matin, un à midi et un le soir. Calculer la probabilité de chacun des évènements suivants :

B_1 : « des fruits de même variété sont mangés »
B_2 : « des fruits de variétés différentes sont mangés »
B_3 : « au plus une mangue est mangée »
B_4 : « la pomme est mangée »
B_5 : « Des fruits de même variété sont mangées le matin et le soir »
B_6 : « Deux fruits de même variété sont mangés pendant la journée »

3 / Onze personnes dont TATO choisissent l'un après l'autre un fruit du panier. Calculer la probabilité de des évènements suivants :

C_1 : « les mangues, puis les oranges sont d'abord choisies ».
C_2 : « la pomme est le 8^e fruit choisi »
C_3 : « la première mangue est choisie en 3^e position ».

PROBLEME

Soit f la fonction de IR vers IR définie par : $f(x) = \frac{x^2+x|x|+x+1}{x+2}$. (Cf) est sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J) avec OI = 2 cm.

1°) a) Déterminer Df puis justifier que :

$$\begin{cases} \forall x \in]-\infty; -2[\cup]-2\,; 0],\ f(x) = \dfrac{x+1}{x+2} \\ \forall x \in]0; +\infty[,\ f(x) = \dfrac{2x^2+x+1}{x+2} \end{cases}$$

b) Calculer les limites de f aux bornes de DF et interpréter graphiquement, si possible, les résultats obtenus.

c) Justifier que la droite (Δ) d'équation y = 2x – 3 est une asymptote à (Cf) en + ∞ .

d) Préciser les positions relatives de (Cf) et (Δ) sur] 0 ; +∞[.

2°) a) Etudier la continuité de f en 0.

b) Prouver que la fonction f est dérivable en 0 et donner l'équation de la tangente (T) à (Cf) au point d'abscisse 0.

3°) a) Pour x ∈] - ∞ ; 0] \ { 2 }, calculer f ' (x) et donner son signe.

b) Pour x ∈] 0 ; + ∞[, calculer f '(x) et étudier son signe.

c) Dresser le tableau de variation de f

4°) a) Démontrer que f admet une seule racine α sur Df.

b) Vérifier que α = -1

c) Donner le signe de f(x) selon les valeurs de x

5°) Tracer dans le repère (O, I, J), les asymptotes, la tangente (T) et la courbe (Cf).

6°) Soit h la restriction de f à] 0 ; + ∞[.

a) Justifier que h admet une bijection réciproque h^{-1} dont on précisera l'ensemble de définition.
b) Déterminer la valeur exacte de $h^{-1}o\ h$ (2014).
c) Etudier la dérivabilité de h^{-1} en $\frac{4}{3}$.
d) Donner l'équation de la tangente (T') à la courbe (Ch^{-1}) au point d'abscisse $\frac{4}{3}$.
e) Tracer (Ch^{-1}) et son asymptote dans le repère (O, I, J).
f) Déterminer la formule explicite de h^{-1}.

7°) Soit F la primitive sur]-2 ; 0] de la fonction (- f) telle que F(-1) = - 0, 8.

a) Vérifier que $\begin{cases} \forall\, x \in \left]-2\,;-1\right],\ f(x) \leq 0 \\ \forall\, x \in \left]-1;\,0\right],\ f(x) \geq 0 \end{cases}$

b) En déduire le sens de variation de F.

c) Sans calculer ses limites, dresser le tableau de variation de F.

d) Justifier que $\forall\, x \in \left]-2\,;0\right],\ F(x) < 0$.