COMPLEXE SCOLAIRE L'ARDOISE ANNEE SCOLAIRE 2013 – 2014

DEVOIR DE MATHEMATIQUES Tle D

DUREE : 2 heures

EXERCICE 1 : Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $z^2 - (1 + 2i)z + 1 + 7i = 0$

EXERCICE 2 : On donne les nombres complexes suivants :

$$u = \frac{\sqrt{2}(\cos\frac{\pi}{12} + i\sin\frac{\pi}{12})}{1+i} \quad \text{et} \quad v = \frac{1+i\sqrt{3}}{1-i\sqrt{3}}$$

1°) a) Ecrire u sous la forme trigonométrique puis sous la forme algébrique.

b) Ecrire sous la forme algébrique le nombre complexe $z = (5i - 1)\,u^{2014}$

2°) a) Ecrire le nombre complexe v sous la forme trigonométrique.

b) Déterminer sous forme trigonométrique les racines 6ème de v puis représenter leurs points images dans le plan muni du repère orthonormé (O,I,J) tel que OI = 3 cm.

EXERCICE 3 : Soit M le point d'affixe $z = x + iy$. On pose $Z = -z + i\bar{z} + z\bar{z} - i$.

1°) Exprimer en fonction de x et y, les parties réelle X et imaginaire Y de Z.

2°) Déterminer et construire dans le plan muni du repère orthonormé (O, I, J)

a) L'ensemble (E_1) des points M du plan tels que Z soit un réel.

b) L'ensemble (E_2) des points M du plan tels que Z soit un imaginaire pur.

c) L'ensemble (E_3) des ponts M du plan tels que le point image de Z appartienne à la droite d'équation $y = x$.

EXERCICE 4 : On donne dans le plan complexe muni du repère (O, I, J) les points A(2 ; 0) ; B($-\sqrt{2}$; $\sqrt{2}$) et K le milieu de [AB]. L'unité graphique est : 2 cm.

1°) a) Ecrire l'affixe z_B de B sous la forme algébrique puis trigonométrique.

b) En déduire Mes $(\overrightarrow{OI}; \overrightarrow{OB})$.

c) Placer dans le repère (O, I, J) les points A, B et K.

2°) a) Justifier que le triangle OAB est isocèle. En déduire Mes $(\overrightarrow{OI}; \overrightarrow{OK})$.

b) Ecrire l'affixe z_K de K sous la forme algébrique puis calculer le module de z_K.

c) En déduire la forme trigonométrique de z_K.

3°) Déduire de 2°) les valeurs exactes de $\cos\frac{3\pi}{8}$ et $\sin\frac{3\pi}{8}$ et vérifier que $\tan\frac{3\pi}{8} = \sqrt{2} + 1$