COLLÈGES CATHOLIQUES
NOTRE DAME D'AFRIQUE
ET SAINT JEAN BOSCO

BACCALAURÉAT
BLANC
Session Janvier 2015

SERIE D
Coefficient : 04
Durée : 04 heures

MATHÉMATIQUES

EXERCICE I :

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]0;+\infty[$ par :

$f(x) = \ln(x) + 1 - \frac{1}{x}$

1. Déterminer les limites de la fonction f aux bornes de son ensemble de définition.
2. Etudier le sens de variation de la fonction f sur l'intervalle $]0;+\infty[$ puis dresser son tableau de variation.
3. Calculer $f(1)$ et en déduire le signe de $f(x)$ pour tout x appartenant à $]0;+\infty[$
4. Soit la fonction F définie sur $]0;+\infty[$ par : $F(x) = x\,lnx - \ln x$.
   a- Démontrer que F est une primitive de la fonction f sur $]0;+\infty[$.
   b- Démontrer que la fonction F est strictement croissante sur $[1;+\infty[$.
   c- Démontrer que l'équation $F(x) = 1 - \frac{1}{e}$ admet une solution unique α dans l'intervalle $[1;+\infty[$.

EXERCICE II :

On dispose de deux urnes U_1 et U_2.
L'urne U_1 contient 4 jetons numérotés de 1 à 4.
L'urne U_2 contient 4 boules blanches et 6 boules noires.
Un jeu consiste à tirer un jeton de l'urne U_1, à noter son numéro, puis à tirer simultanément de l'urne U_2 le nombre de boules indiqué par le jeton.
On considère les évènements suivants :

J_1 : « Le jeton tiré de l'urne U_1 porte le numéro 1 »

J_2 : « Le jeton tiré de l'urne U_1 porte le numéro 2 »
J_3 : « Le jeton tiré de l'urne U_1 porte le numéro 3 »
J_4 : « Le jeton tiré de l'urne U_1 porte le numéro 4 »
B : « Toutes les boules tirées de l'urne U_2 sont blanches »

On donnera tous les résultats sous la forme d'une fraction irréductible

1) Calculer $P_{j1}(B)$, probabilité de l'évènement B sachant que l'évènement J_1 est réalisé.
   Calculer de même la probabilité $P_{J2}(B)$.
   On admet dans la suite des résultats suivants :
   $$P_{J3}(B) = \frac{1}{30} \qquad \text{et} \qquad P_{J4}(B) = \frac{1}{210}$$
2) Démontrer que P(B), probabilité de l'évènement B, vaut $\frac{1}{7}$.
   On pourra s'aider d'un arbre de probabilités.

3.) On dit à un joueur que toutes les boules qu'il a tirées sont blanches. Quelle est la probabilité que le jeton tiré porte le numéro 3 ?

PROBLEME

Partie A

On considère la fonction numérique g définie de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ par : $g(x) = \frac{2x}{\sqrt{x^2+1}} - 1$

1. Calculer les limites de g aux bornes de son ensemble de définition.

2. a) Vérifier que pour tout réel x, $g'(x) = \frac{2}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}$.

b) Etudier le sens de variation de g.

c) Dresser le tableau de variation de g.

3. a) Démontrer que l'équation de $g(x)=0$ admet une solution et une seule notée β dans $[0; 2]$.

b) Donner un encadrement de β à 10^{-1} près, par la méthode de balayage.

4. En déduire le signe de $g(x)$.

Partie B

On considère la fonction :

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

$x \mapsto -\frac{x}{2} + \sqrt{x^2+1} + \frac{1}{2}$ et on note *(C)* sa courbe représentative dans le repère orthonornal *(O,I,J)*, unité graphique *2 cm*.

1. Calculer les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$.
2. **a)** On admet que f est dérivable sur IR. Démontrer que pour tout x élément de IR $f'(x) = \frac{1}{2}\, g(x)$.
   b) En déduire le sens de variation de f.
   c) Dresser le tableau de variation de f.
3. Démontrer que $f(\beta) = \frac{3\beta+1}{2}$, puis calculer $f(\beta)$ pour $\beta = \frac{3}{5}$.
4. Démontrer que la droite (D) d'équation $y = -\frac{3}{2}x + \frac{1}{2}$ est une asymptote oblique à (C) en $-\infty$.
5. Démontrer que la droite (Δ) d'équation $y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$ est une asymptote oblique à (C) en $+\infty$.
6. Déterminer une équation de la tangente (T) à (C) au point d'abscisse 0.
7. Construire (C). On prendra soin de tracer d'abord les asymptotes, les tangentes horizontales et la tangente (T) au point d'abscisse 0 on prendra $\beta = \frac{3}{5}$.

Partie C

Soit h la restriction de f à l'intervalle $]-\infty; \beta[$.

1. Démontrer que h réalise une bijection de $]-\infty; \beta[$ vers un intervalle K que l'on déterminera.
2. Dresser le tableau de variation de h^{-1} sur K.
   a) Démontrer que h^{-1} est dérivable en $\frac{3}{2}$.
   b) Calculer $(h^{-1})'\left(\frac{3}{2}\right)$