DGEM / DP
DEVOIRS COMMUNSDE NIVEAU
JANVIER / FEVRIER 2015

Durée : 4 h
Coeff. : 2

NIVEAU : Terminale C

ÉPREUVE DE MATHEMATIQUES

Cette épreuve comporte deux pages numérotées1/2, 2/2,

EXERCICE 1

1.a) Quel est le reste de la division euclidienne de 6^{10} par 11 ? Justifier.

b) Quel est le reste de la division eulidienne de 6^4 par 5 ? Justifier.

c) En déduire que $6^{40} \equiv 1[\![11]\!]$ et que $6^{40} \equiv 1[\![5]\!]$.

d) Démontrer que 6^{40}-1 est divisible par 55.

2. Dans cette question, x et y désignent des entiers relatifs.

a) Montrer que l'équation : (E) 65x - 40y = 1 n'a pas de solution.

b) Montrer que l'équation : (E') 17x – 40y = 1admet au moins une solution.

c) Détermine, à l'aide de l'algorithme d'Euclide, un couple d'entiers relatifs solution de l'équation (E')

d) Résoudre l'équation (E')

En déduire qu'il existe un unique entier naturel x_0 inférieur à 40 tel que $17x_0 \equiv 1[40]$.

3. Pour tout entier naturel a, démontrer que, si $a^{17} \equiv$ b [55] et si $a^{40} \equiv 1[55]$.

Alors $b^{33} \equiv a[55]$

EXERCICE 2

A- On donne P(z) = $z^3+(-16+i)z^2$ + (89-16i)z + 89i

1) Calculer P(-i). En déduire une factorisation de P(z)

2) Résoudre l'équation z∈C ; P(z) = 0

B- Dans le plan compexe rapporté on repère (O,I,J)

On considèreA(-i); B(8+5i) et C(8-5i)

1) Placer A, B, et C

2) Démontrer que le triangle ABC est isocèle

3) Soit G le barycentre des points pondérés (A ;-1), (B ;1) et (C ;-1)

Montrer que lequadrilatère AGBC est un losange.

4) On considère l'ensemble (E1) des points M du plan tels que MA^2 - MB^2 + MC^2 = -20

a) Démontrer que A ∈ (E_1) et C ∈ (E_1)

b) Déterminer et construire (E_1)

5) Déterminer et construire l'ensemble (E_2) des points du plan tels que

$$\|\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\| = \|\overrightarrow{MA} - 2\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\|$$

PROBLEME

Partie A

On donne g(x) = x + ln(x) +1

1) Dresser le tableau de variation de g sur l'ensemble Dg de définition de g

2-a) Démontrer que l'équation $x \in]0;+\infty[$, $g(x) = 0$ admet une solution unique $\propto$comprise entre 0,2 et 0,3

b) Démontrer que $\forall x \in]0;\propto[$, $g(x) < 0$

$\forall x \in]0;+\infty[$, $g(x) > 0$

Partie B

Soit f la fonction numérique définir par

$$f\begin{cases} f(x) = \dfrac{x\ln x}{1+x} & si\ x > 0 \\ \quad f(0) = 0 \end{cases}$$

1°) Démontrer que f est continue en 0

2°) Etudier la dérivabilité de f en 0 . Interpréter graphiquement ce résultat.

3°) a – Calculer les limites de f(x) et $\frac{f(x)}{x}$ en + ∞

b) En déduire une interprétation graphique du calcul des limites.

4°) a- Justifier que $f'(x=\frac{g(x)}{(1+x)^2}$

b) En déduire le sens de variation de f

c) Dresser le tableau de variation de f

d) Justifier que f($\propto$)= -$\propto$

5°) En utilisant 4°)a-, déterminer la primitive de $\frac{g(x)}{(1+x)^2}$ qui prend la valeur 2 en 1

6°)- a Calculer f(1)

b) Représenter graphiquement (Cf) dans le plan mini d'un repère (O,I,J)

Unité graphique : 5 cm

On prendra $\propto$= 0,3