DEVOIR DE NIVEAU **Durée : 3H30**

23 JANVIER 2015

MATHEMATIQUES

SERIE C

Cette épreuve comporte quatre (04) pages Numérotées 1/4,2/4,3/4 et 4/4.
Toute calculatrice scientifique est autorisée

EXERCICE 1

On note (Ψ) l'ensemble des 27 nombres entiers compris entre 0 et 26.
On note (Ω) l'ensemble dont les éléments sont les 26 lettres de l'alphabet et un séparateur entre deux mots noté * considéré comme un caractère.

Pour coder les éléments de (Ω), on procède de la façon suivante :

-Premièrement : on associe à chacune des lettres de l'alphabet ; rangés par l'ordre alphabétique, un nombre entier compris entre 0 et 25, rangés par l'ordre croissant :
On a donc : A $\mapsto$ 0 ; B $\mapsto$ 1 ;............................ ; Z $\mapsto$ 25.
On associe au séparateur * le nombre 26.

-Deuxièmement: à chaque élément x de (Ψ) l'application g associe le reste de la division euclidienne de $4x+3$ par 27.

-Troisièmement: le caractère de rang x est alors remplacé par le caractère de rang $g(x)$.

1-a)Compléter le tableau suivant :

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	*
0	1	2	3																							

b) Coder la lettre V.
c)Vérifier que la lettre I est codée par elle-même.

2-a)Trouver tous les entiers x de (Ψ) tels que : $g(x)=x$.
b) En déduire les caractères invariants par le codage.

3-a)Démontrer que pour tous entiers naturels x et y appartenant à (Ψ) si $y \equiv 4x+3[27]$ alors $x \equiv 7y+6[27]$.
b)En déduire un procédé de décodage.

4-Décoder le mot GIT.

EXERCICE 2

Soit $\alpha \in \left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$. On considère l'équation (E) : $(1+iz)^3(1-i\tan\alpha)=(1-iz)^3(1+i\tan\alpha)$ d'inconnue complexe z .

1- a) Soit z solution de (E). Montrer que : $|1+iz|=|1-iz|$.

b) En déduire que z est réel.

2-Soit $z \in$ IR .Justifier qu'il existe un unique réel $\theta \in \left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$ tel que $z=\tan\theta$.

3-Exprimer $\dfrac{1+i\tan\alpha}{1-i\tan\alpha}$ en fonction de $e^{i\alpha}$.

4-a) Montrer que (E) équivaut à l'équation (E') d'inconnue θ : $e^{6i\theta}=e^{2i\alpha}$

b)Résoudre (E') .

5-Déterminer les solutions de (E) .

PROBLEME

Soit $n \in$ IN. On considère la fonction f_n définie sur IR par : $\begin{cases} f_n(x)=nx+|x|\ln(x^2) \ si \ x\neq 0 \\ f_n(0)=0 \end{cases}$

On désigne par :

C_n la courbe représentative de f_n dans un repère orthonormé (O ;I ;J) .

C_n^+ la partie de C_n dont les points ont une abscisse positive.

C_n^- la partie de C_n dont les points ont une abscisse négative.

On prendra pour unité graphique 4 cm.

Partie A

1-Ecrire f_n sans le symbole de la valeur absolue.

2-a)Déterminer la limite de f_n en $+\infty$ et en $-\infty$.

b) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f_n(x)}{x}$ et $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f_n(x)}{x}$.

c) En déduire une interprétation graphique.

3-Etudier la continuité et la dérivabilité de f_n en 0.

4-Etudier les variations de f_n puis dresser son tableau de variation.

Partie B

1-Soit A_n le point de C_n^+ ou la tangente est parallèle à l'axe des abscisses.

a)Déterminer les coordonnées de A_n.

b) Démontrer que les points A_n appartiennent à une droite (D) quand n décrit IN.

2- Soit B_n le point d'intersection autre que O de C_n^+ avec l'axe des abscisses.

a)Donner les coordonnées de B_n.

b) Démontrer que la tangente à C_n en B_n a une direction indépendante de n.

Partie C

1-Soit g la fonction définie sur IR^+ par : $g(x) = f_0(x)$.

a)Donner les variations de g puis dresser son tableau de variation.

b) Tracer la courbe Π de g.

c) En déduire C_0 en expliquant la méthode utilisée, On mettra en évidence les points de la partie B.

2-a)Démontrer que pour tout x de IR^+, on : $f_n(xe^{-\frac{n}{2}}) = e^{-\frac{n}{2}}g(x)$.

b) Déduire que C_n^+ est l'image de Π par une homothétie dont on précisera le centre et le rapport.

3-Démontrer, de manière analogue, que C_n^- est l'image de C_0^- par une homothétie qu'on précisera.

4-Construire C_2.