DEVOIR de MATHEMATIQUES

Durée : 4H
Niveau : TleD

EXERCICE 1 :

On teste un médicament sur un ensemble d'individus ayant un taux de glycémie anormalement élevé.
Pour cela 60% des individus prennent le médicament, les autres recevant une substance neutre et l'on étudie à l'aide d'un test la baisse du taux de glycémie.
Chez les individus ayant pris le médicament, on constate une baisse de ce taux avec une probabilité de 0,8.
On ne constate aucune baisse de ce taux pour 90% des personnes ayant reçu la substance neutre.

1. Calculer la probabilité d'avoir une baisse du taux de glycémie sachant qu'on a pris le médicament.
2. Démontrer que la probabilité d'avoir une baisse du taux de glycémie est 0,52.
3. On soumet au test un individu pris au hasard. Quelle est la probabilité qu'il ait pris le médicament sachant que l'on constate une baisse de son taux de glycémie.
4. On contrôle 5 individus au hasard.
   a. Quelle est la probabilité d'avoir exactement deux personnes dont le taux de glycémie a baissé.
   b. Quelle est la probabilité d'avoir au moins un individu dont le taux de glycémie a baissé.
5. On contrôle n individus pris au hasard. (n est un entier naturel non nul).
   Déterminer n pour que la probabilité d'avoir au moins un individu dont le taux de glycémie a baissé soit supérieur à 0,98.

EXERCICE 2 :

Le plan est muni d'un repère orthonormé (O, I, J). L'unité est le centimètre.
Soit A, B et C trois points d'affixes respectives Z_A, Z_B et Z_C tels que :
$Z_A = 2+6i$; $Z_B = 4+2i$; $Z_C = 6i$.

1. Placer les points A , B et C dans le plan.
2. a. Déterminer la forme algébrique de $Z = \frac{Z_O - Z_A}{Z_B - Z_A}$ où Z_O est l'affixe du point O.

   b. Ecrire Z sous forme trigonométrique.

   c. Déterminer une mesure de l'angle orienté $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AO}\right)$.
3. soit r la rotation de centre B et d'angle $-\frac{\pi}{2}$
   a. Déterminer l'écriture complexe de r.
   b. Déterminer l'image de O par r
   c. En déduire que le triangle OAB est rectangle et isocèle en B.
4. a. Déterminer le centre et rayon du cercle (C) circonscrit au triangle OAB. Construire (C)
   b. Démontrer que les points O,A,B et C appartiennent à un même cercle.

PROBLEME

PARTIE A

On donne la fonction P définie par $P(x) = e^{2x} - 5e^{x} + 4$.

1. Résoudre l'équation : $x \in R, P(x) = 0$
2. Démontrer que : $\forall x \in]-\infty; 0[\cup]ln4; +\infty[, P(x) > 0$
   $\forall x \in]0; ln4[, P(x) < 0$.

PARTIE B

Soit la fonction f définie de R vers R par $f(x) = x - 1 + \frac{1}{e^{x}-2}$
On désigne par (C) sa courbe représentative dans le plan muni du repère orthonormé (O,I,J). Unité : 2cm

1. Déterminer l'ensemble de définition de f.

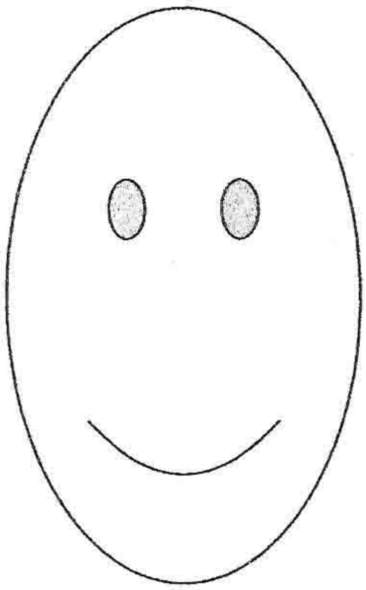
2. Calculer les limites de f en $+\infty$; en $-\infty$; à gauche et à droite en ln2
3. On admet que f est dérivable en tout point de son ensemble de définition et on note f' sa dérivée.
   a. Vérifier que : $\forall x \in]-\infty; ln2[\cup]ln2; +\infty[$, $f'(x) = \frac{P(x)}{(e^x-2)^2}$
   b. Etudier le signe de $f'(x)$ suivant les valeurs de x.
   c. Dresser le tableau de variation de f.
4. Démontrer que la droite (D) d'équation y = x-1 est une asymptote oblique à (C) en $+\infty$.
5. Etudier la position de (C) par rapport à (D) sur l'intervalle $]ln2; +\infty[$
6. Démontrer que : $\forall x \in]-\infty; ln2[\cup]ln2; +\infty[, f(x) = x - \frac{3}{2} + \frac{e^x}{2(e^x-2)}$
7. Démontrer que la droite (Δ) d'équation $y = x - \frac{3}{2}$ est une asymptote oblique à (C) en $-\infty$.
8. Etudier la position de (C) par rapport à (Δ) sur l'intervalle $]-\infty; ln2[$.
9. Construire (C).

PARTIE C

Soit λ un nombre réel strictement négatif.

1. Exprimer en fonction de λ, l'aire $A(\lambda)$ en cm^2 de la partie du plan comprise entre la courbe (C), la droite (OJ), la droite (Δ) et la droite d'équation $x = \lambda$
2. a. calculer la limite A de $A(\lambda)$ lorsque λ tend vers $-\infty$.

c. Hachurer sur la figure, la partie du plan dont l'aire est égale à A



« le nombre entier vient de ***Dieu,*** *tout le reste vient de l'homme. »*

J. Kronecker (mathématicien 1823-1891)